Análise Matemática II

Exercícios XI

1 - Estude quanto á continuidade e diferenciabilidade as seguintes funções:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{3x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & x+y > 0 \\ x+y & x+y \leq 0 \end{cases}$$

2 - Considere a função

$$U(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2y^2}{(x^2-1)^2+y^2} + y & (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

Determine $\frac{\partial U}{\partial v}(0,0)$ para um vector $v = (h,k) \neq (0,0)$ e estude U quanto à diferenciabilidade.

3 - Considere a função

$$h(x,y) = \begin{cases} xy\ln(x^2+y^2) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Determine $\frac{\partial h}{\partial v}(0,0)$ para um vector $v = (h,k) \neq (0,0)$.

b) Em que pontos se verifica a igualdade

$$x\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = y\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)?$$

c) Verifique se $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e se f é diferenciável na origem.

3 - Determine as equações das rectas normal e tangente à curva de equação $x + y - \ln(xy) = e$ no ponto $(1, e)$.

4 - Determine uma parametrização da recta tangente à curva de intersecção dos cilindros $x^2 + z^2 = 25$ e $y^2 + z^2 = 25$ no ponto $(3, -3, 4)$.

6 - Em que direcção e sentido nos devemos deslocar a partir do ponto $(0, 0)$ de modo a aumentar mais rapidamente o valor da funccão $T(x, y) = x^2 + y$?
Em que ponto, *à distância* 1 *da origem*, a função T atinge valor maior?
Interprete o resultado.

7 - Determine a matriz jacobiana, no ponto $(1, 0)$ da função

$$f(x, y) = (e^{x^2 y}, \ln(x^4 + y^2 + 1), \sinh(\arctan(x, y)))$$

8 - Supondo que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é diferenciável, e que

$$F(x, y) = f(x, x + y, xy)$$

exprima $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ em termos das derivadas parciais de f.