Análise Matemática II

Exercícios X

1 - A trajectória de uma partícula em $\mathbb{R}^2$ é dada pelas equações

$$x(t) = t - 2\sin t \,, \qquad y(t) = 4 - 3\cos t$$

com $0 \leq t \leq 10$. Determine em que instantes foi a trajectória vertical e horizontal. A trajectória passou mais de uma vez por algum ponto? Faça um esboço da trajectória no plano.

2 - Determine uma parametrização de cada um dos seguintes conjuntos e use-a para os identificar e representar geometricamente, de forma aproximada:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 3x\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 4x + 4y\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 + 2xy + 2y = 0\}$$

3 - Determine o conjunto de pontos do plano cujas coordenadas polares satisfazem a equação

$$r = \sin\theta.$$

4 - Um braço articulado realiza o seguinte movimento: o primeiro segmento, de comprimento 1, tem uma extremidade fixa e roda a velocidade constante e no sentido directo; o segundo segmento, também de comprimento 1, tem uma extremidade fixa na extremidade livre do primeiro e roda a velocidade dupla do primeiro e no sentido oposto.

Determine uma parametrização da trajectória efectuada pela extremidade livre do segundo segmento e esboce essa trajectória.

5 - Calcule as derivadas parciais, nos pontos em que existirem, das seguintes funções:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{y \sin x}{x+y} & x+y \neq 0 \\ 0 & x+y = 0 \end{cases}$$

Verifique se essas funções são contínuas na origem.

6 - Calcule, nos pontos em que existirem, as derivadas parciais das funções referidas nos exercícios da ficha IX.

7 - Calcule a derivada segundo o vector $v = (2,1)$, no ponto $(1,1)$ da função $g(x,y) = \ln(xy)$. Sendo $f(t) = (t^2, t)$, calcule $(g \circ f)'(1)$.