Trabalho de Matemática Computacional
Licenciatura em Engenharia Informática e Computadores
1o. Sem. 2003/2004

Versão 5

Um indivíduo contrai uma dívida ao Banco no valor de D_0, com uma taxa de juro J. Para liquidar essa dívida deverá pagar anualmente uma prestação no valor de $A_n, n = 0, 1, 2, \ldots$. Neste caso, o valor da dívida ao fim de $n+1$ anos (D_{n+1}) pode calcular-se através da fórmula de recorrência

$$D_{n+1} = D_n(1+J) - A_n. \qquad (1)$$

Admitindo que as prestações são crescentes com uma taxa de crescimento $T \neq J$, verifica-se

$$A_n = A_0(1+T)^n, \qquad (2)$$

onde A_0 é o valor da primeira prestação. Pode provar-se, por indução, que neste caso o valor de D_n satisfaz a equação:

$$D_n = (D_0 - \frac{A_0}{J-T})(1+J)^n + \frac{A_0}{J-T}(1+T)^n. \qquad (3)$$

1. Escreva um programa que dados os valores de D_0, A_0 , J,T e n permita calcular o valor da dívida D_n através das fórmulas (1) e (2). Para verificar a exactidão dos resultados compare com os que se obtêm pela fórmula (3).

2. Utilizando o programa referido na alínea anterior e o **método da bissecção** , escreva um algoritmo que lhe permita determinar quanto deve ser a primeira prestação para que a dívida fique totalmente liquidada ao fim de 20 anos. Trace o gráfico de D_n como função de n para dois exemplos diferentes: com $T = 0$ e com $T > 0$.

   Sugestão: usar como intervalo incicial $[0, D_0]$.

3. Representemos por S_n a soma das primeiras n prestações pagas. Então

   $$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_i = \frac{(1+T)^n - 1}{T} A_0. \qquad (4)$$

   Escreva um programa que, sabendo S_n, D_0, T e J, lhe permita determinar A_0 e n, onde n é o prazo de liquidação da dívida (em anos) . Apresente a solução (com erro relativo não superior a 10^{-6}), para o caso de $S_n = 10000$, $D_0 = 5000$,$J = 0.07$ e $T = 0.02$. (Nota: no caso de a solução para n não ser um número inteiro, pode-se considerar que a última prestação foi inferior às outras).

   *Sugestão:*Resolva cada uma das equações (4) e (3) em ordem a A_0 e iguale as expressões obtidas. Resolvendo a equação resultante através do *método de Newton*, obtenha o valor de n.

4. Comparando os erros das sucessivas iteradas, determine experimentalmente a ordem de convergência do método de Newton neste exemplo.

   OBS: Como não se conhece n, para calcular os quocientes $\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}$ toma-se a aproximação final x_{K+1} como sendo n ($n = x_{K+1}$) e calculam-se os quocientes

   $$\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}, k = 1, 2, \ldots, K-1.$$