

# Exame de Matemática Computacional

2ª Época – 7 de Fevereiro de 2002

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica — Departamento de  
Matemática, Instituto Superior Técnico

4º ano Lic. Engenharia Informática e Computadores

Duração: 3 horas

**Apresente os cálculos, e justifique sucintamente as suas respostas.**

1. A área ( $A$ ) de um triângulo rectângulo foi calculada medindo a sua base ( $b$ ) e o ângulo ( $\theta$ ) entre a base e a hipotenusa ( $h$ ), tendo-se obtido as seguintes medidas:

$$\begin{aligned} b &= 30 \text{ m} && (\text{com erro absoluto inferior a } 3 \text{ cm}) \\ h &= 40 \text{ m} && (\text{com erro absoluto inferior a } 5 \text{ cm}) \\ \theta &= 41.5^\circ && (\text{com erro absoluto inferior a } 0.1^\circ). \end{aligned}$$

a) Mostre que a área  $A$  pode ser calculada mediante a expressão [1.0]

$$A = \frac{b h \sin(\theta)}{2}.$$

b) Calcule a área do triângulo em causa exprimindo o resultado levando em conta o erro absoluto do resultado calculado. (Sugestão: aplique a fórmula de propagação de erro absoluto que conhece). [1.0]

2. Considere a equação

$$x = e^{\frac{1}{x}} \quad (*)$$

a) Se possível, determine um majorante do número de condição da função  $g(x) = e^{1/x}$  em  $D = [-1, 1] \setminus \{0\}$ . A função  $g$  é bem condicionada em  $D$ ? Justifique. [1.5]

b) Prove que a equação (\*) tem uma única solução positiva,  $z$ , a qual está contida no intervalo  $[1.6, 2]$ . [1.5]

c) Calcule uma aproximação de  $z$  executando três iterações pelo método do ponto fixo. [1.0]

d) Usando o método referido na alínea anterior, sem efectuar mais que uma iteração e ignorando erros de arredondamento, obtenha um majorante do erro absoluto de  $x_{20}$ , se partir da aproximação inicial  $x_0 = 1.8$ . [1.5]

e) Utilize os dois últimos valores calculados na alínea c) para obter uma aproximação da raiz pretendida, aplicando o método da secante. [1.5]

Se este método for convergente, sabe-se que a sua ordem de convergência é  $p = (1 + \sqrt{5})/2$ . Que significa isso?

3. Admita que  $f : D \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^4$  da qual se conhecem os seguintes valores:

|       |     |     |    |     |     |
|-------|-----|-----|----|-----|-----|
| $x_i$ | -4  | -3  | -2 | -1  | 0   |
| $f_i$ | 741 | 216 | 21 | -24 | -27 |

**3 a)** A partir duma tabela de diferenças divididas diga, justificando, se  $f$  pode ser ou não um polinómio de grau 3. [1.0]

**3 b)** Obtenha o polinómio interpolador dos últimos 4 pontos tabelados e, usando esse polinómio, calcule uma aproximação de  $f(-0.5)$ . [1.0]

**3 c)** Diga como calcularia o polinómio interpolador da tabela a partir do polinómio que obteve na alínea anterior. Justifique. [1.0]

**4 a)** Utilizando um método de factorização que considere adequado, obtenha a factorização  $LU$  da matriz [1.5]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 9 & 5 \\ 2 & 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

**4 b)** Prove, em face do resultado da alínea anterior, que  $A$  é singular. [1.0]

**4 c)** Indique, justificando, um limite superior do raio espectral da matriz  $A$ . [1.5]

**4 d)** Sendo  $I$  a matriz identidade, considere o sistema  $(A + I)u = b$ , com  $b = (0, 0, 0, 0)^T$ . Calcule o erro (para a norma  $\|\cdot\|_\infty$ ) da primeira iterada do método de Gauss–Seidel, partindo da aproximação inicial  $u_0 = (0, 1, 0, 1)^T$  (efectue cálculos exactos). [1.5]

**5 a)** Utilize a regra dos trapézios para obter uma aproximação do integral definido [1.5]

$$\int_0^{0.2} e^{2x} dx$$

com erro inferior a  $\epsilon = 10^{-2}$ . Verifique que, de facto, o erro do valor calculado é menor que  $\epsilon$ .

**5 b)** Explique por que razão a regra de Simpson só é aplicável se considerar um número ímpar de nós de integração. [1.0]