

Instituto Superior Técnico  
Departamento de Matemática  
**Exame de Matemática Computacional - 12 de Fevereiro de 2004 (segunda época )**  
Licenciatura em Engenharia Informática e Computadores

I

Considere a sucessão de números reais  $\{x_n\}, n \in N$ , tal que  $x_0 \in \mathbb{R}$  e

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cos(x_n) + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

1. **1.5** Com base no teorema do ponto fixo, justifique que esta sucessão converge e que o seu limite não depende de  $x_0$ .  
*Sugestão:* considere inicialmente  $x_0 \in [-R, R]$ , onde  $R$  é um número real positivo arbitrário.
2. **1.0** Determine (justificando teoricamente) um intervalo real (de comprimento não superior a 1) que contenha o limite a que se refere a alínea anterior.
3. **1.5** Sendo  $x_0 = 1$ , determine (sem calcular iterações) qual o valor mínimo de  $n$  para o qual se garante que  $|x_n - z| \leq \epsilon$ , onde  $z$  é o limite da sucessão considerada e  $\epsilon$  um número positivo dado.
4. **2.0** Partindo do mesmo valor de  $x_0$ , efectue duas iterações do método de Newton, com o objectivo de aproximar  $z$ . Para garantir que se verifique a mesma estimativa de erro que na alínea anterior, serão necessárias, neste caso, mais ou menos iterações? Justifique.

II

Pretende-se resolver o seguinte sistema de equações não-lineares pelo método de Newton:

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 + x_3^3 = -3 \\ 4x_1 + x_2^3 + x_3 = 2 \\ x_1x_3 + 5x_2 = 3 \end{cases}, \quad (1)$$

usando como aproximação inicial o vector  $x^{(0)} = (1, 0, -1)^T$ .

1. **1.5** Mostre que, para se obter  $x^{(1)}$ , se deve resolver um sistema linear da forma  $Av = h$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$v$  e  $h$  são vectores de  $\mathbb{R}^3$ . Calcule o vector  $h$ .

2. **1.5** Transforme o sistema linear considerado num sistema equivalente, de modo a que fique garantida a convergência do o método de Gauss-Seidel. Depois, tomando como aproximação inicial  $v^{(0)} = (-1, -1, -1)^T$ , aplique este método até obter a solução exacta do sistema linear. (Se não resolveu a alínea anterior, considere um vector  $h$  arbitrário e efectue uma iteração do método de Gauss-Seidel).
3. **1.0** Finalmente obtenha o valor de  $x^{(1)}$  (primeira iterada do método de Newton), usando os cálculos da alínea anterior.
4. **1.5** Calcule  $\text{Det}A$  (onde  $A$  é a matriz considerada em 1), aplicando a factorização de Doolittle.

### III

Considere a função real  $f$  cujos valores são dados na seguinte tabela:

|          |   |     |     |     |   |
|----------|---|-----|-----|-----|---|
| $x_i$    | 0 | 1/4 | 1/2 | 3/4 | 1 |
| $f(x_i)$ | 7 | 4   | 1   | 3   | 7 |

1. **1.5** Utilizando a fórmula interpoladora de Newton, **de grau 2**, obtenha um valor aproximado de  $f(0.7)$ . Justifique a escolha dos nós de interpolação.
2. **2.0** Determine os valores das constantes  $b_0, b_1$  que minimizam o valor da soma

$$\sum_{i=0}^4 \left( f(x_i) - b_0 - b_1(x_i - 0.5)^2 \right)^2,$$

onde  $f$  é a função tabelada, e calcule esse mínimo.

3. Pretende-se aproximar o integral

$$\int_0^1 g(x)dx,$$

onde  $g$  é uma certa função real, por uma quadratura do tipo

$$I_2(f) = A_0g(1/4) + A_1g(1/2) + A_2g(3/4).$$

- (a) **2.0** Determine os pesos da quadratura pelo método dos coeficientes indeterminados e diga qual o seu grau.
- (b) **1.0** Aplique a quadratura obtida ao cálculo do integral  $\int_0^1 f(x)/(x^2 + 1)dx$ , onde  $f$  é a função a que se refere a tabela anterior.
4. **2.0** Considere a equação diferencial

$$y''(x) = \cos(x)y(x) + y'(x)$$

com as condições iniciais

$$y(0) = 1; \quad y'(0) = 1.$$

Reduzindo-a previamente a um sistema de equações de primeira ordem, obtenha valores aproximados de  $y(h)$  e  $y'(h)$  (com  $h > 0$ ), efectuando um único passo do método de Euler.

## SEGUNDA PARTE

1. **10.** Considere o sistema de duas equações não lineares

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2^2 &= a_3 \\ b_1x_1^2 + b_2x_2 &= b_3, \end{aligned}$$

onde  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  são coeficientes reais conhecidos.

Escreva um programa em *Mathematica* que, dados os valores destes coeficientes, procure uma solução do sistema pelo método de Newton. A execução do programa termina quando a norma da diferença entre iteradas for menor que uma certa tolerância  $\epsilon$ , dada pelo utilizador, ou ao fim de um certo número de iterações, caso este critério de paragem não seja entretanto atingido. O programa devolve a solução aproximada, caso esta seja obtida, ou uma mensagem dizendo que não foi encontrada a solução. Para resolver os sistemas lineares das iterações, utilizar o comando *LinearSolve*.

2. **10.** Escreva um programa em *Mathematica* que, dados os valores de uma função  $f$  em quatro pontos  $x_0, x_1, x_2, x_3$ , e um ponto arbitrário  $x$ , devolva o valor aproximado de  $f(x)$ , calculado por interpolação cúbica. O polinómio interpolador deve ser construído pela fórmula de Newton.