Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática IV

1º Semestre 2004/2005

2º Exame

(LCI, LEAE, LEBm, LEEC, LEFT, LMAC)

21 de Janeiro de 2005

Duração da Recuperação do Teste: 1h30m
Duração do Exame: 3h00m
Justifique cuidadosamente todas as respostas.

(2,5 val.) **1.** Esboce geometricamente, tão precisamente quanto possível, os seguintes subconjuntos de $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{z \in \mathbb{C} : e^z = -1\}\\ \Omega_2 &= \left\{z \in \mathbb{C} : z = \sqrt{iw}, \text{ com } \mathsf{Re}(w)^2 + \mathsf{Im}(w)^2 \leq 1,\ 0 \leq \arg(w) \leq \pi/4\right\}\end{aligned}$$

(2,5 val.) **2.** (i) Mostre que a função complexa definida pela expressão $\varphi(x+iy) = (e^{-y}+e^{y})\cos x + i\,(e^{-y}-e^{y})\,\mathrm{sen}\,x$ é holomorfa em todo o $\mathbb{C}$.

(ii) Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $u(x,y) = (e^{-y}+e^{y})\,\mathrm{sen}\,x$. Mostre que u é harmónica e calcule $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de modo a que $u + iv$ seja holomorfa em $\mathbb{C}$.

(2,5 val.) **3.** Considere a seguinte função $f(z) = \frac{1}{1+e^z}$ Determine e classifique todas as singularidades de f. Calcule os resíduos de f nesses pontos. Aproveite os resultados para determinar o valor do integral de f sobre a curva representada na figura seguinte, percorrida uma vez no sentido indicado. Justifique *detalhadamente* o raciocínio que utilizou.

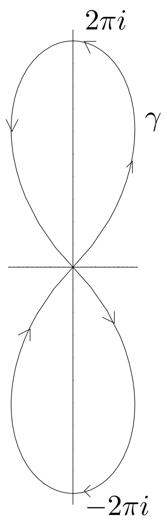

Figura 1: A curva γ

(2,5 val.) **4.** (i) Determine a(s) série(s) de Laurent em potências de z da função $g(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{2-z}$ e determine a(s) sua(s) região(ões) de convergência.

(ii) Seja σ a circunferência de raio 3 centrada em $z = 0$, percorrida uma vez em sentido directo. Diga, *justificando detalhadamente*, se pode, ou não, usar o resultado da alínea anterior para calcular o valor de $\int_\sigma g$. Em caso afirmativo calcule o valor deste integral.

(iii) Calcule o valor do integral na alínea anterior utilizando a Fórmula Integral de Cauchy.

(2,5 val.) **5.** (i) Determine a solução geral (real) do seguinte sistema de EDOs lineares

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 2y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2 \end{cases}$$

e esboce o respectivo retrato de fases.

(ii) Determine a solução que satisfaz a condição inicial $y_1(0) = y_2(0) = 1$.

(2,0 val.) **6.** Considere a equação diferencial linear

$$\psi'' - 2\psi' + 5\psi = 5e^{2t} \tag{1}$$

(i) Determine a solução geral real da equação homogénea.

(ii) Determine a solução de (1) que satisfaz $\psi(0) = 1$, $\psi'(0) = 2$.

(2,5 val.) **7.** Considere a equação diferencial ordinária

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1 + x^2}{1 + t^2} \tag{2}$$

(i) Mostre que os problemas de valores iniciais para (2) têm solução local única.

(ii) Determine a solução de (2) que satisfaz $x(0) = 1$ e determine o seu intervalo máximo de existência, esclarecendo detalhadamente por que razão a solução não pode ser prolongada a um intervalo maior.

(iii) Calcule o polinómio de Taylor de segunda ordem que melhor aproxima a solução que determinou na alínea anterior em torno do ponto inicial $x(0) = 1$.

(3,0 val.) **8.** (i) Determine uma série de Fourier de senos da função definida em $[0, 1]$ por $\nu(x) = x(1-x)$ e, *justificando cuidadosamente*, esboce o gráfico da *soma* da série de Fourier obtida.

(ii) Considere uma corda vibrante de comprimento 1, fixa nas extremidades e sujeita a um amortecimento tal que os seus movimentos são descritos pelo problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} u_{tt} + 2u_t = u_{xx}\,, & (t, x) \in \mathbb{R} \times]0, 1[\\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0\,, & t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3}$$

Determine a solução geral formal de (3).

(iii) Se a corda parte do repouso (i.e., $u(0, x) \equiv 0$) com velocidade inicial dada por ν da alínea `(i)` (ou seja, $u_t(0, x) = \nu(x)$,) determine uma expressão para a solução formal do problema de valores iniciais e de fronteira.