

Cálculo de Variações e Equações Diferenciais Parciais

1º Semestre de 2004/05

Sumários das aulas

Foram leccionadas 30 aulas com a duração de 90 minutos,
o que corresponde a 15 semanas de aulas.

Seguiu-se de perto a referência [1]

1 Introdução

- Aula 1, 15.9.04 Introdução. Método dos Multiplicadores de Lagrange. Problemas lineares e métodos de dualidade. Exemplos: Problema da dieta e Problema do transporte óptimo.
- Aula 2, 17.9.04 Complementaridade dos problemas primal e dual. Problemas unidimensionais. Equações de Euler-Lagrange. Exemplo numa variedade Riemanniana. Problema da Braquistócrona.
- Aula 3, 22.9.04 Equações de Euler-Lagrange para um corpo rígido. Exercício sobre a métrica de Jacobi.
- Aula 4, 24.9.04 Teorema de Tonelli. Teorema de Noether.
- Aula 5, 29.9.04 Transformada de Legendre.
- Aula 6, 1.10.04 Formalismo Hamiltoniano. Problemas multidimensionais.
- Aula 7, 6.10.04 Controlo óptimo com valor terminal.
- Aula 8, 8.10.04 Problema de Mather, Problema de Mather Estocástico. Problema de Monge-Kantorowich.
- Aula 9, 13.10.04 Equações de Euler-Lagrange para os problemas da aula anterior, problemas duais.
- Aula 13, 27.10.04 Teorema de Fenchel-Rockafellar. Aplicação ao Teorema de Monge-Kantorowich.

2 Problemas variacionais unidimensionais

- Aula 10, 15.10.04 Conclusão da Aula 9.
Semicontinuidade inferior fraca. Solução fraca da equação de Euler-Lagrange. Existência de mínimo. Regularidade.
- Aula 11, 20.10.04 Resolução de exercícios: dual do problema de transporte óptimo de uma medida em si própria, fenómeno de Lavrentiev, o integral do Jacobiano é um Lagrangeano nulo.

3 Cálculo de variações e problemas elípticos

- Aula 12, 22.10.04 Semicontinuidade inferior fraca. Método de energia - Regularidade $W^{2,2}$ no interior.
- Aula 14, 29.10.04 Regularidade Hölder: estimativa para o supremo essencial a partir de uma norma L^p para $p \geq 2$.
- Aula 15, 3.11.04 Prova da regularidade Hölder assumindo que existem $p > 0$ e $C > 0$ tais que $\int_{B_R} u^{-p} \int_{B_R} u^p \leq C$.
- Aula 16, 5.11.04 Conclusão da regularidade Hölder: existem $p > 0$ e $C > 0$ tais que $\int_{B_R} u^{-p} \int_{B_R} u^p \leq C$. Prova do Lema de John-Nirenberg.
- Aula 17, 10.11.04 Espaços de Campanato e Morrey.
- Aula 18, 12.11.04 Estimativas de Schauder - equações com coeficientes constantes (excluindo a prova do lema técnico final).
- Aula 19, 17.11.04 Estimativas de Schauder - conclusão da aula anterior (prova do lema técnico); equações com coeficientes Hölder).

4 Controlo óptimo e soluções de viscosidade

- Aula 20, 19.11.04 Subdiferenciais e superdiferenciais. Funções semicôncavas.
- Aula 21, 24.11.04 Existência de mínimo para custos terminais diferenciáveis.

Aula 22, 26.11.04 Teorema principal do controlo óptimo.

Aula 23, 3.12.04 Pontos regulares e diferenciabilidade da função valor. A função valor é solução da equação de Hamilton-Jacobi em quase toda a parte. Soluções de viscosidade.

Aula 24, 10.12.04 A função valor é solução de viscosidade da equação de Hamilton-Jacobi. A função valor é semicôncava.

Aula 25, 15.12.04 Unicidade da solução de viscosidade.

Aula 26, 17.12.04 Exemplos.

Aula 27, 21.12.04 Optimização em intervalos de tempo ilimitados: Minimização da acção média.

Aula 28, 26.1.05 Exemplo do Pêndulo.

5 Problemas lineares e Equações Diferenciais Parciais

Aula 29, 27.1.05 Aplicação do Teorema de Fenchel-Rockafellar ao Problema de Mather.

Aula 30, 28.1.05 $H^* = \bar{H}$, conjuntos invariantes, construção de medidas de Mather.

Referências

- [1] D. Gomes, *Notas de Cálculo de Variações e Equações Diferenciais Parciais*.
- [2] Arnold, Kozlov, Neishtadt, *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*. Dynamical systems. III, Encyclopaedia Math. Sci., 3, Springer. 1993.
- [3] L.C. Evans, *Partial differential equations*. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society. 1998.
- [4] Fleming and Soner, *Controlled Markov processes and viscosity solutions*. Applications of Mathematics, 25. Springer-Verlag, New York. 1993.
- [5] Giaquinta, *Introduction to regularity theory for nonlinear elliptic systems*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag. 1993.
- [6] Villani, *Topics in optimal transportation*. Graduate Studies in Mathematics, 58. American Mathematical Society. 2003.