

Aula 21 2/12/2025

- $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$
- $\nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$
- $\text{div } F = \nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_1, F_2, F_3) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$
- $\text{rot } F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$

- $\text{rot}(\nabla \phi) = \nabla \times (\nabla \phi) = 0$

1. $\text{rot } F = 0 \Rightarrow F = \nabla \phi$

? R.: Em geral não. Sim nos conj^{ts} simplesmente conexos

2. $\text{div}(\text{rot } F) = 0 \mapsto$ campo solenoidal ($\text{div } F = 0$)

$\text{div}(F) = 0 \Rightarrow F = \text{rot } A$

? R.: Em geral não. Sim nos conj^{ts} em estrela.

É simplesmente conexo mas não em estrela pq não há 1 ponto q se possa ligar a todos os outros por apenas 1 segmento de reta contínuo

Todas as estrelas são simpls. conexos mas um grande número de simpls. conexos não são em estrela

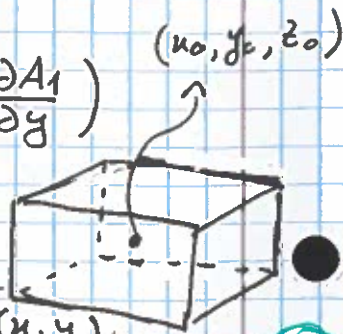
Como calcular o potencial vetor de um campo solenoidal definido num retângulo, ou seja, dado F tal que domínio de F é um retângulo e $\text{div } F = 0$.
Determinar A tal que: $F = \text{rot } A$

$$(F_1, F_2, F_3) = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}, \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}, \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right)$$

Procuramos A da forma $(A_1, A_2, 0)$

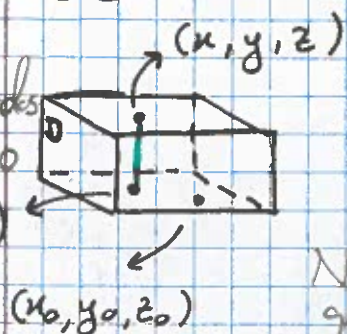
$$-\frac{\partial A}{\partial z} = F_1 \Rightarrow A_2(x, y, z) = - \int_{z_0}^z F_1(x, y, s) ds + g(x, y)$$

para qnd derivar em relação a z



$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = F_2 \Rightarrow A_1(x, y, z) = \int_{z_0}^z F_2(x, y, s) ds + h(x, y)$$

Estão todos
no domínio
 (x, y, z_0)



$$F_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}$$

Não esquecer
que F é dado

F é solenoidal
 $\nabla \cdot F = 0$

$$= - \int_{z_0}^z \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, s) ds - \frac{\partial g}{\partial x} - \left(- \int_{z_0}^z \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, s) ds - \frac{\partial h}{\partial y} \right) = F_3(x, y, z)$$

Temos 2 incógnitas para 1 equação. Podemos escolher uma das incógnitas, digamos $g = 0$.

$$- \int_{z_0}^z \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, s) ds - \int_{z_0}^z \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, s) ds - \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = F_3(x, y, z)$$

Solenoidal $\rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F_3}{\partial z} = - \frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial y}$

$$\int_{z_0}^z \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, s) ds - \frac{\partial h}{\partial y} = F_3(x, y, z) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_3(x, y, z) - F_3(x, y, z_0) - \frac{\partial h}{\partial y} = F_3(x, y, z) \Leftrightarrow$$

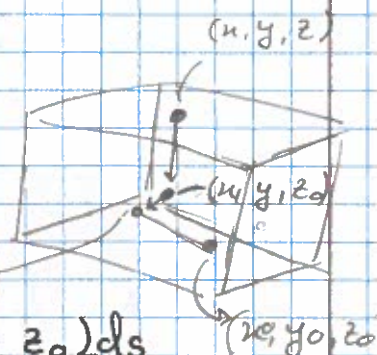
$$\Leftrightarrow \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = -F_3(x, y, z_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h(x, y) = - \int_{y_0}^y F_3(x, s, z_0) ds + k(x)$$

Escolhemos $A_3 = 0$, $g = 0$, $k = 0$

$$A_1(x, y, z) = \int_{z_0}^z F_2(x, y, s) ds - \int_{y_0}^y F_3(x, s, z_0) ds$$

$$A_2(x, y, z) = - \int_{z_0}^z F_1(x, y, s) ds$$



Exemplo

$$F = (\cos x, \sin y, z \sin x - z \cos y)$$

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial}{\partial x} (\cos x) + \frac{\partial \sin y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} (z \sin x - z \cos y) = 0 \text{ e é solenoidal}$$

Cálculo de um potencial vetor da forma $(A_1, 0, A_3)$

$$\frac{\partial A_3}{\partial y} = \cos x; \quad \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = \sin y; \quad -\frac{\partial A_1}{\partial y} = z \sin x - z \cos y$$

$$A_3 = y \cos x + g(x, z)$$

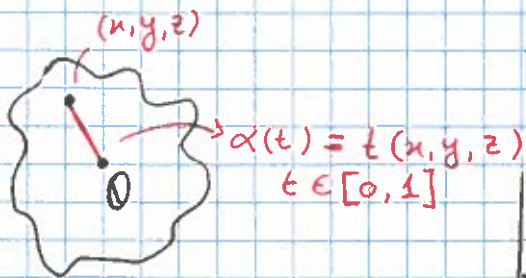
$$A_1 = -y z \sin x + z \sin y + h(x, z) \quad \text{escolhemos } h = 0$$

$$\sin y = \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = -y \sin x + \sin y + y \sin x - \frac{\partial g}{\partial x}(x, z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial g}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow g(x, z) = k(z) \quad \text{escolhemos } g(x, z) = 0$$

$$A = (-y z \sin x + z \sin y, 0, y \cos x)$$

→ Outro método para obter um potencial vetor de um campo solenoidal definido num conjunto em estrela em relação ao ponto zero



$$\phi(x, y, z) = \int_0^1 F(tx, ty, tz) \cdot \alpha'(t) dt$$

Campos fechados

div $F = 0$ A tal que $F = \text{rot } A$
com a hipótese de dom F ser em estrela em relação ao ponto $(0,0,0)$: produto externo

$$A(x, y, z) = \int_0^1 F(tx, ty, tz) \times \alpha(t) dt$$

A parte
rot $F = 0$ e pretendendo obter $\phi : \nabla \phi = F$

$$\phi(b) = \int F \cdot d\alpha = \int \nabla \phi \cdot d\alpha =$$

$$= \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t_1)} \nabla \phi(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \phi(\alpha(t)) dt = \phi(\alpha(t_1)) - \phi(\alpha(t_0)) = \phi(b) - \phi(a) \quad \text{C} = 0$$