

Caso Particular

$$u_0(x) = 3 \sin\left(\frac{5\pi x}{l}\right) - 7 \sin\left(\frac{9\pi x}{l}\right)$$

$C_5 = 3$ $C_9 = -7$, todas as outras são zero

$$u(x, t) = 3 e^{-\frac{25\alpha\pi^2}{l^2}t} \sin\left(\frac{5\pi x}{l}\right) - 7 e^{-\frac{81\alpha\pi^2}{l^2}t} \sin\left(\frac{9\pi x}{l}\right)$$

- Para verificar vê-se se a função está a cumprir as igualdades q nos deram no início
- Coisas q ã se justificam formalmente: q b_n é diferenciável e q as séries de Fourier convergem a $\sin$ ali é. Verificam-se apenas por substituir as coisas nas originais e ver se dá certo ou ã
- No caso em que se tem a barra isolada as condições fronteiras ficam:

$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$, neste caso faz-se prolongament por x de período $2l$

Aula 24

12/12/2025

Último dia

notação para $\frac{du}{dt}$

$$u_t = \alpha u_{xx} \quad (x, t) \in [0, l] \times [0, +\infty[$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad t \in [0, +\infty[$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in [0, l]$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2}t} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad x = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\lambda_n t} \psi_n$$

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad (**)$$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = u_0(x)$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} \dot{X} = AX & t \in [0, +\infty[\\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

$$X = e^{At} X_0 = S e^{Lt} S^{-1} X_0 = \alpha e^{\lambda_1 t} v_1 + \beta e^{\lambda_2 t} v_2$$

$A_{N \times N}$ com N vetores próprios linearmente independentes $v_1, \dots, v_n$

$$X(t) = \sum_{n=1}^N c_n e^{\lambda_n t} v_n$$

$$X(0) = \sum_{n=1}^N c_n v_n$$

$e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2} t}$
 $\sin \frac{n \pi x}{l}$

$$Af = \alpha f''$$

$$A \sin\left(\frac{n \pi x}{l}\right) = \boxed{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2}} \sin\left(\frac{n \pi x}{l}\right) = \boxed{\lambda_n}$$

é uma função própria porque depois da operação aparece uma função múltipla da original

$$A f_n = \lambda_n f_n$$

$$\textcircled{1} y' = ay$$

Nos 3 casos (1), (2) e (3) temos a equação

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = ay}$$

$$\boxed{\frac{dX}{dt} = AX}$$

$$\boxed{\frac{du}{dt} = Au}$$

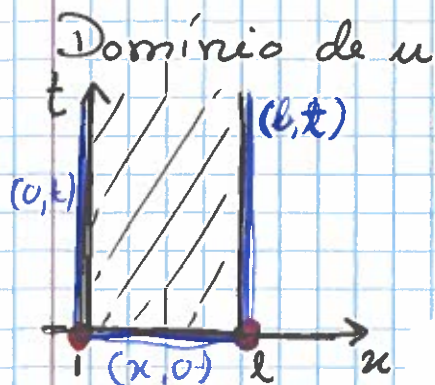
Para a função u_0 ~~se~~ boa, (*) com os C_n 's dados por (**) é solução do problema.

u tem duas derivadas contínuas em ordem a x
 u " uma " " " " a t

Uma solução é, por definição, uma função dif. em ordem a t com derivada contínua e 2ª dif. em ordem a x com u_{xx} contínua

Prova-se que u_0 boa significa $u_0 \in C^3$ e satisfaz a condições de compatibilidade.

Condições de Compatibilidade



estes pontos têm info 2x (para as barreiras verticais e para a barreira horizontal)

① $u(0,0) = 0 = u_0(0)$ isto tem de ser verdade

② $u(l,0) = 0 = u_0(l)$ isto tmb tem de ser "

$$u(x,0) = u_0(x) \Rightarrow u_{xx}(x,0) = u_0''(x) \text{ para } x \in [0, l]$$

$$\begin{aligned} u(0,t) = 0 &\Rightarrow u_t(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 &\Rightarrow u_t(l,t) = 0 \end{aligned} \text{ para } t \in [0, +\infty[$$

$$\begin{cases} u_{xx}(0,0) = u_0''(0) & u_{xx}(l,0) = u_0''(l) \\ u_t(0,0) = 0 & u_t(l,0) = 0 \\ u_t(0,0) = \alpha u_{xx}(0,0) & u_t(l,0) = \alpha u_{xx}(l,0) \end{cases}$$

③ $u_0''(0) = 0$

④ $u_0''(l) = 0$ têm ambas de ser verdade

Se estas 4 condições se verificarem a fórmula anterior funciona perfeitamente

Nota: Se pretendermos soluções mais regulares existiriam mais condições de compatibilidade

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha u_{xx} \Rightarrow u_{tt} = \alpha u_{txx} \\ &\Downarrow \\ u_{xx}t &= \alpha u_{xxxx} \quad \rightarrow \quad u_{tt} = \alpha^2 u_{xxxx} \\ &\downarrow \text{daqui saia } u_0''''(0) = 0 \\ &\quad \quad \quad u_0''''(l) = 0 \end{aligned}$$

Equação das Ondas

A uma dimensão

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \underline{c > 0} (*)$$

A três dimensões

$$u_{tt} = c^2 \Delta u$$

Laplaciano
de u

$$\Delta u = \operatorname{div} \nabla u = \operatorname{div} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \\ = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

(*) admite as soluções:

$$u(x, t) = f(x+ct)$$

$$u(x, t) = g(x-ct)$$

$$\forall f, g \in C^2; f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

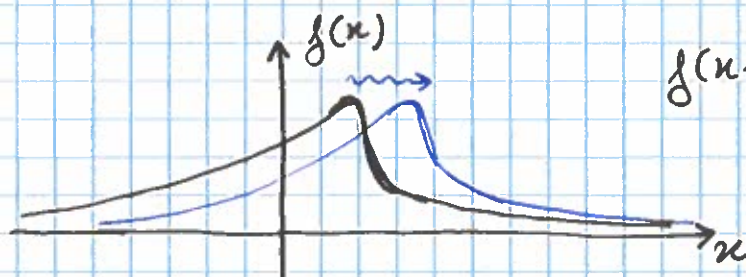
$$u_t = c f'(x+ct)$$

$$u_x = f'(x+ct)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$u_{tt} = c^2 f''(x+ct)$$

$$u_{xx} = f''(x+ct)$$



$$f(x-ct) \xrightarrow{c=2} f(x-2ct)$$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \\ \vec{E} = -\nabla \phi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} (-\nabla \phi) = \frac{\rho}{\epsilon} \Leftrightarrow$$

$$-\Delta \phi = \frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{Eq. Poisson}$$

quando $\rho = 0$, ϕ satisfaz

$$\Delta \phi = 0 \rightarrow \text{Eq. de Laplace}$$

As soluções da eq. de Laplace chamam-se funções harmônicas