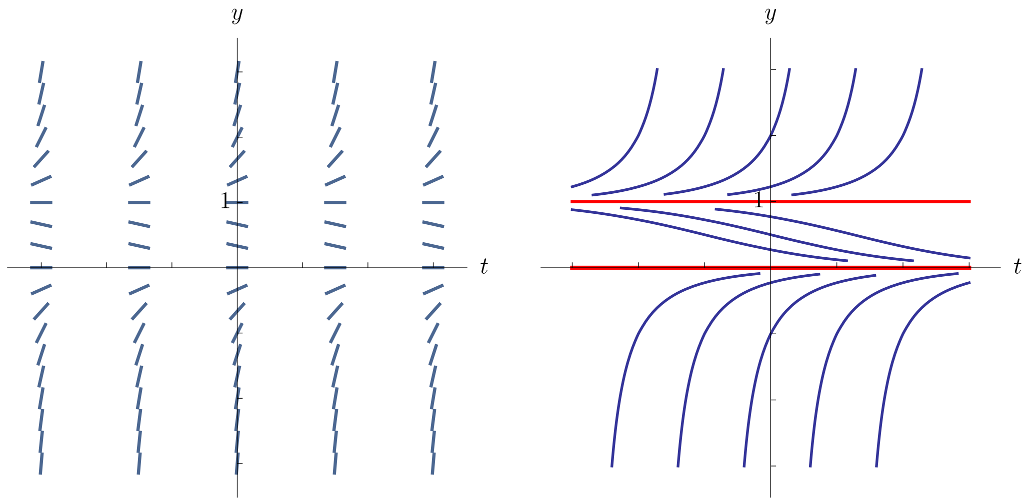
Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Teste - 16 de Dezembro de 2017

MEC

Resolução

1.



2. A equação é linear. A solução é

$$y = \frac{1}{2(t+1)}\left(1 - \frac{1}{(t+1)^2}\right).$$

3.

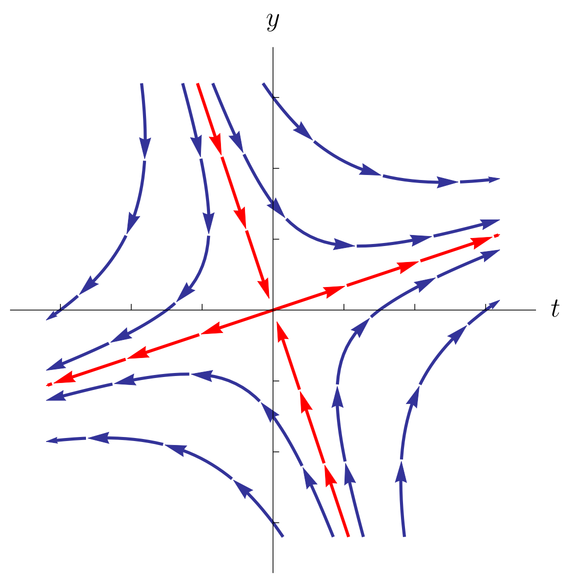
a) O polinómio característico da matriz do sistema é

$$p(\lambda) = (\lambda + 10)(\lambda - 10).$$

A solução do sistema que satisfaz a condição inicial é

$$X(t) = \frac{(3x_0 + y_0)}{10} e^{10t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{(x_0 - 3y_0)}{10} e^{-10t} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

b)



4. Designando por D o operador de derivação, a equação diferencial escreve-se

$$(D+2)(D-2)y = 4e^{-2t} - t.$$

Se y é uma solução da equação diferencial, então

$$D^2(D+2)^2(D-2)y = 0,$$

isto é,

$$y = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + c_3te^{-2t} + c_4 + c_5t.$$

Substituindo esta expressão para y na equação original, obtém-se

$$\begin{aligned}(D+2)(D-2)(c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + c_3te^{-2t} + c_4 + c_5t) &= 2e^{-t} + 3t\\ \Leftrightarrow\ (D+2)(D-2)(c_3te^{-2t} + c_4 + c_5t) &= 2e^{-t} + 3t.\end{aligned}$$

Logo,

$$c_3 = -1,\ c_4 = 0,\ c_5 = \frac{1}{4}.$$

A solução geral da equação diferencial do enunciado é

$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} - te^{-2t} + \frac{t}{4}.$$

5.

a) Para cada t, prolonga-se u como função par em x e periódica em x, de período 2π. Então, para cada t fixo, desenvolvendo $x \mapsto u(x,t)$ em série de Fourier,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\cos(nx).$$

As condições fronteira estão formalmente satisfeitas. Substituindo na equação diferencial, vem

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n'(t)\cos(nx) = -\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+3)a_n(t)\cos(nx).$$

Usando a unicidade dos coeficientes de Fourier, para todo o n deve ter-se

$$a_n'(t) = -(n^2+3)a_n(t).$$

A expressão para os a_n's é

$$a_n(t) = c_n e^{-(n^2+3)t}$$

Portanto, obtém-se

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-(n^2+3)}\cos(nx).$$

A equação diferencial está formalmente satisfeita. Resta garantir a condição inicial:

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\cos(nx) = 2 - 3\cos(4x).$$

Logo,

$$c_0 = 2,\ c_4 = -3,$$

e os outros c_n's são nulos. A solução do problema é

$$u(x,t) = 2e^{-3t} - 3e^{-19t}\cos(4x).$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^\pi u_x^2(x,t)\,dx &= 2\int_0^\pi u_x u_{xt}\,dx \\ &= -2\int_0^\pi u_{xx}u_t\,dx \\ &= -2\int_0^\pi (u_{xx}^2 - 3u_{xx}u)\,dx \\ &= -2\int_0^\pi (u_{xx}^2 + 3u_x^2)\,dx \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

6. A equação é separável sendo a sua forma canónica

$$y\ln y\, y' = \sin^3 x.$$

Obtém-se

$$\int y\ln y\,dy = \int \sin^3 x\,dx,$$

$$\frac{y^2}{2}\ln y - \frac{1}{2}\int y\,dy = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx,$$

$$\frac{y^2\ln y}{2} - \frac{y^2}{4} = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c.$$