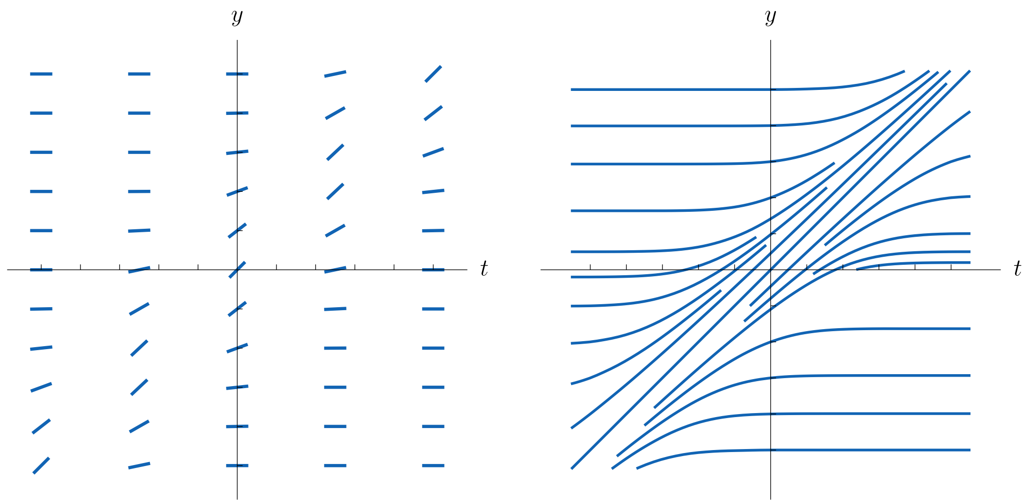
Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Teste - 17 de Dezembro de 2016

LEMat e MEAer

Resolução

1.



2. A equação é separável. A solução é

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\ln(1-t)}}.$$

3. Designando por D o operador de derivação, a equação diferencial escreve-se

$$(D^2 - 4)y = t^2.$$

O operador D^3 aniquila $t \mapsto t^2$. Se y é uma solução da equação diferencial, então

$$D^3(D-2)(D+2)y = 0,$$

isto é,

$$y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + a_0 + a_1 t + a_2 t^2.$$

Substituindo esta expressão para y na equação original, obtém-se

$$\begin{aligned} &(D-2)(D+2)(c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = t^2 \\ &\Leftrightarrow\ (D-2)(D+2)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = t^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$a_0 = -\frac{1}{8},\ a_1 = 0,\ a_2 = -\frac{1}{4}.$$

A solução geral da equação diferencial do enunciado é

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4}t^2.$$

A solução que satisfaz $y(0) = y'(0) = 0$ é

$$y(t) = \frac{1}{16}e^{2t} + \frac{1}{16}e^{-2t} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4}t^2 = \frac{1}{8}\cosh t - \frac{1}{8} - \frac{1}{4}t^2.$$

4.

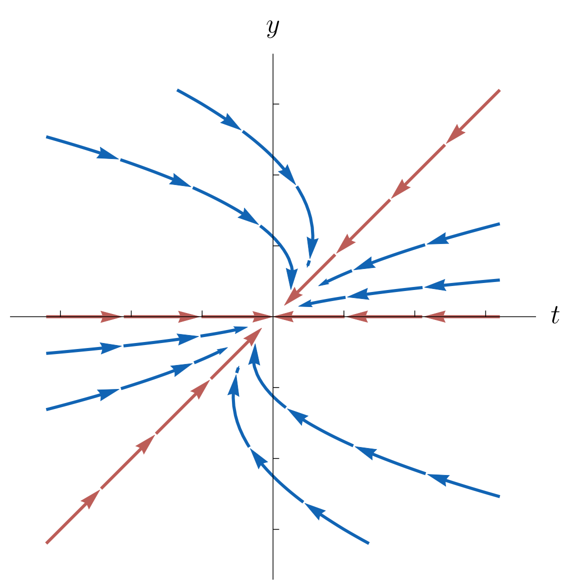
a) O polinómio característico da matriz do sistema é

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2).$$

A solução do sistema que satisfaz a condição inicial é

$$X(t) = (x_0 - y_0)e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y_0 e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b)



5. Para cada t, prolonga-se u como função par em x e periódica em x, de período 2π. Em particular, u_0 também fica par. Então, para cada t fixo, desenvolvendo $x \mapsto u(x,t)$ em série de Fourier,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\cos(nx).$$

As condições fronteira estão formalmente satisfeitas. Substituindo na equação diferencial, vem

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n'(t)\cos(nx) = -\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n(t)\cos(nx) + (4t+1)\cos(2x).$$

Usando a unicidade dos coeficientes de Fourier,

$$\begin{cases} a_2'(t) = -4a_2(t) + 4t + 1, & \\ a_n'(t) = -n^2 a_n(t) & \text{para } n \neq 3. \end{cases}$$

A equação para a_2 pode escrever-se na forma

$$(D+4)a_2 = 4t + 1.$$

A sua solução é

$$a_2(t) = c_2 e^{-4t} + t.$$

A expressão para os outros a_n's é

$$a_n(t) = c_n e^{-n^2 t} \quad \text{para } n \neq 2.$$

Portanto, obtém-se

$$u(x,t) = t\cos(2x) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-n^2 t}\cos(nx). \tag{1}$$

A equação diferencial está formalmente satisfeita. Resta garantir a condição inicial:

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx) = u_0(x).$$

A última igualdade mostra que os c_n's devem ser os coeficientes de Fourier de u_0. Logo,

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_0(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_0(x)\cos(nx)\,dx$$

para $n > 0$, e

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_0(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} u_0(x)\,dx.$$

A solução do problema é (1) com estes c_n's.

6.

a)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|X\|^2 &= \frac{d}{dt}(x^2+y^2) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} \\
&= 2x(-2x+y) + 2y(-y) \\
&= -\,2(2x^2 - xy + y^2)\big|_{y=1} \\
&= -2(2x^2 - x + 1) \\
&= -2\Big(2\Big(x - \frac{1}{4}\Big)^2 + \frac{7}{8}\Big).
\end{aligned}$$

O máximo ocorre para $x = \frac{1}{4}$ e vale $-\frac{7}{4}$.

b) Se $X(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ y_0 \end{bmatrix}$, então a primeira coordenada x de X é

$$x(t) = y_0(e^{-t} - e^{-2t}).$$

O valor máximo desta função ocorre quando $t = \ln 2$ e vale

$$x(\ln 2) = \frac{y_0}{4}.$$