Análise Complexa e Equações Diferenciais

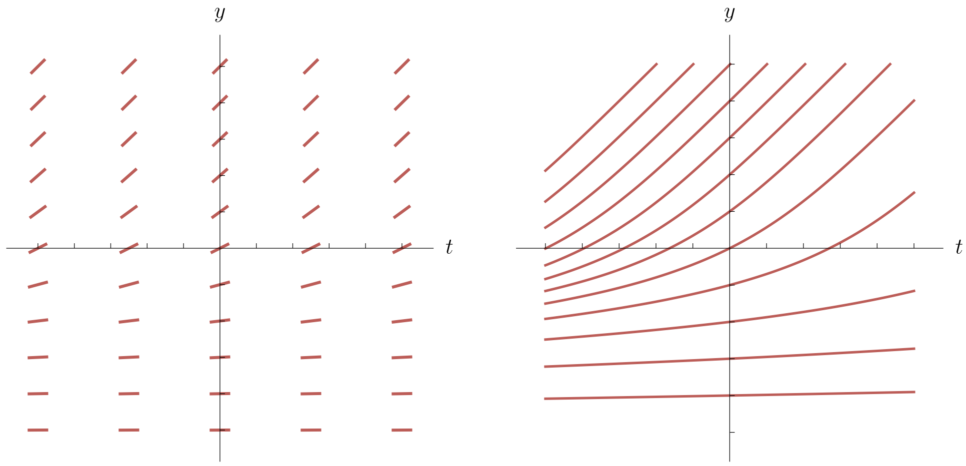
2º Teste - 28 de Maio de 2016

LEGM e MEC

Resolução

1.

a)



b) Como é afirmado no enunciado, a equação é separável sendo a sua forma canónica

$$\frac{e^y+1}{e^y}y' = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad (1+e^{-y})y' = 1.$$

Vem, sucessivamente,

$$\frac{d}{dy}(y-e^{-y})\frac{dy}{dt} = 1, \quad \frac{d}{dt}(y-e^{-y}) = 1, \quad y-e^{-y} = t+(-t_0+y_0-e^{-y_0}).$$

2. Um factor integrante é e^{-t^2}. Multiplicando ambos os membros da equação diferencial pelo factor integrante, obtém-se

$$e^{-t^2}y' - 2te^{-t^2}y = te^{-t^2}.$$

Reconhece-se no primeiro membro a derivada do produto do factor integrante por y:

$$\frac{d}{dt}[e^{-t^2}y] = te^{-t^2}.$$

Primitivando ambos os membros em ordem a t, segue-se que

$$e^{-t^2}y = -\frac{1}{2}e^{-t^2} + c.$$

Usando a condição inicial, determina-se que a constante c vale 1. Finalmente,

$$y = -\frac{1}{2} + e^{t^2}.$$

3. Designando por D o operador de derivação, a equação diferencial escreve-se

$$(D^2 + 4)y = t^2.$$

O operador D^3 aniquila o segundo membro. Se y é uma solução da equação diferencial, então

$$D^3(D^2 + 4)y = 0,$$

isto é,

$$y = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 \cos(2t) + c_5 \sin(2t).$$

Substituindo esta expressão para y na equação original, obtém-se

$$\begin{aligned} &(D^2 + 4)(c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 \cos(2t) + c_5 \sin(2t)) = t^2 \\ &\qquad\qquad \Leftrightarrow\ (D^2 + 4)(c_1 + c_2 t + c_3 t^2) = t^2. \end{aligned}$$

Assim, deve ter-se

$$2c_3 + 4c_1 + 4c_2 t + 4c_3 t^2 = t^2,$$

pelo que $c_1 = -\frac{1}{8}$, $c_2 = 0$ e $c_3 = \frac{1}{4}$. A solução geral da equação do enunciado é

$$y(t) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4}t^2 + c_4 \cos(2t) + c_5 \sin(2t);$$

as constantes c_4 e c_5 são arbitrárias.

4.

a) O polinómio característico da matriz do sistema é

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1).$$

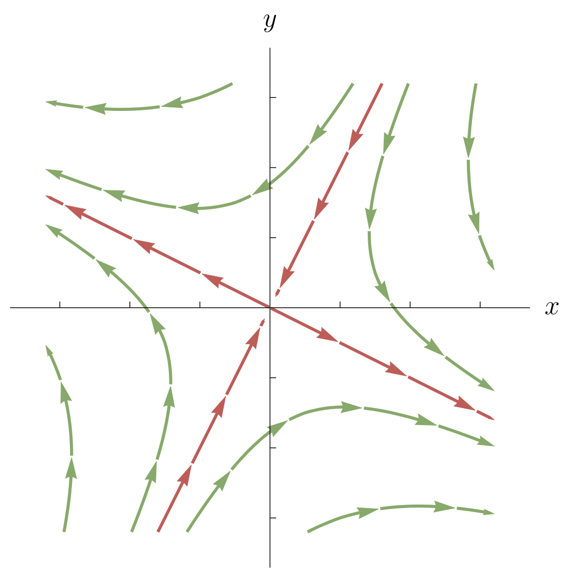
Associado ao valor próprio -1 está o vector próprio $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, e associado ao valor próprio 1 está o vector próprio $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Escolhemos a matriz S igual a $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e a matriz Λ igual a $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. A matriz $e^{\Lambda t}$ é igual a $\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t. \end{bmatrix}$.
A solução geral do sistema que satisfaz a condição inicial é

$$X(t) = e^{At}X_0 = Se^{\Lambda t}S^{-1}X_0,$$

ou seja,

$$X(t) = \frac{x_0 + 2y_0}{5} e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{2x_0 - y_0}{5} e^{t} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

b)



5. Em face das condições fronteira de Neumann homogéneas, para cada t, prolonga-se u como função par em x e periódica em x, de período 2π. Em particular, u_0 também fica par. Então, para cada t fixo, desenvolvendo $x \mapsto u(x,t)$ em série de Fourier,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \cos(nx).$$

As condições fronteira estão formalmente satisfeitas. Substituindo esta expressão para u na equação do calor, vem

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n'(t) \cos(nx) = -\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n(t) \cos(nx).$$

Usando a unicidade dos coeficientes de Fourier,

$$a_n'(t) = -n^2 a_n(t),$$

o que conduz a

$$a_n(t) = c_n e^{-n^2 t} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}_0.$$

Substituindo agora a expressão dos a_n's na expressão para u,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \cos(nx). \tag{1}$$

A equação diferencial está formalmente satisfeita. Resta garantir a condição inicial:

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx) = 1 + 2\cos(3x).$$

Reconhece-se imediatamente que $c_0 = 1$, $c_3 = 2$ e os outros c_n's são nulos. A solução do problema é (1) com estes c_n's:

$$u(x,t) = 1 + 2e^{-9t}\cos(3x).$$

6.

a) A solução obtida em **1b)** é

$$y = t + (-t_0 + y_0 - e^{-y_0}) + e^{-y}.$$

Note-se que $y > t + (-t_0 + y_0 - e^{-y_0})$ (porque e^{-y} é positivo). Esta desigualdade mostra que quando $t \to +\infty$ se tem $y \to +\infty$. Segue-se

$$y - (t + (-t_0 + y_0 - e^{-y_0})) = e^{-y} \to 0.$$

Isto quer dizer que, quando $t \to +\infty$, o gráfico de y tem como assímptota a recta $y = t + (-t_0 + y_0 - e^{-y_0})$.

b) Usando a equação diferencial e a derivada da função composta, pode escrever-se

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d}{dt}y' = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dt} = \left[\frac{d}{dy}\left(1 - \frac{1}{e^y+1}\right)\right]\frac{e^y}{e^y+1} \\ &= \frac{e^y}{(e^y+1)^2}\cdot\frac{e^y}{e^y+1} = \frac{e^{2y}}{(e^y+1)^3} = \frac{r^2}{(r+1)^3}, \end{aligned}$$

onde $r = e^y > 0$. O máximo de y'' ocorre quando

$$\frac{d}{dr}\frac{r^2}{(r+1)^3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2r - r^2}{(r+1)^4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \ln 2.$$

O ponto em que y'' atinge o seu valor máximo é aquele em que $y = \ln 2$. [Mais precisamente, y'' atinge o seu valor máximo para $t = (t_0 - y_0 + e^{-y_0}) + \ln 2 - \frac{1}{2}$.]