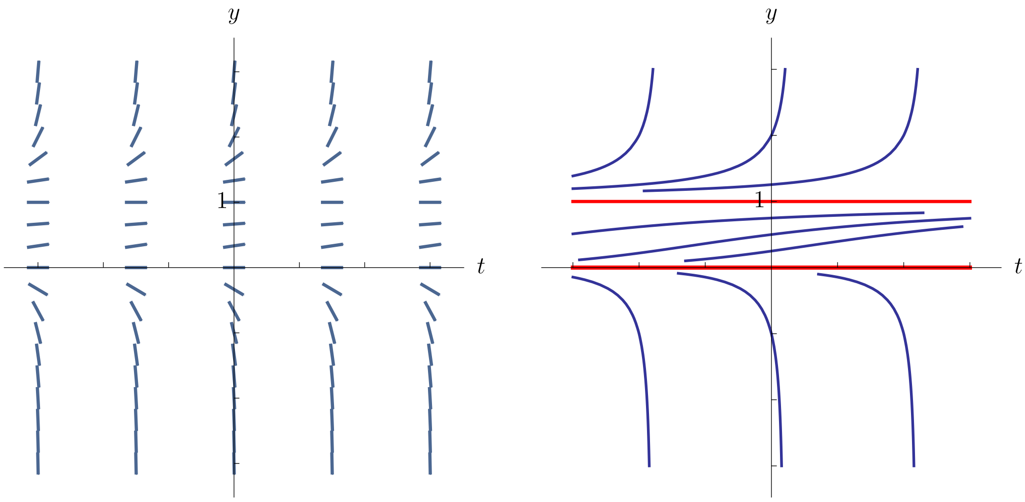
Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Teste - 19 de Dezembro de 2015

LEGM e MEC

Resolução

1.



2. A equação é separável. Vem sucessivamente

$$-\frac{y'}{y^3} = e^{2t}, \qquad \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2y^2}\right)\frac{dy}{dt} = e^{2t}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2y^2}\right) = e^{2t},$$
$$\frac{1}{2y^2} = \frac{e^{2t}}{2} + \frac{c}{2}, \quad \frac{1}{y^2} = e^{2t} + c.$$

Usando a condição inicial $y(0) = -1$, conclui-se que $c = 0$. Logo,

$$y(t) = \pm e^{-t}.$$

Como $y(0) = -1$, deve escolher-se o sinal menos. Portanto,

$$y(t) = -e^{-t}.$$

3. Designando por D o operador de derivação, a equação diferencial escreve-se

$$(D^2 - D - 2)y = (D+1)(D-2)y = e^{2t}.$$

O operador $D-2$ aniquila $t \mapsto e^{2t}$. Se y é uma solução da equação diferencial, então

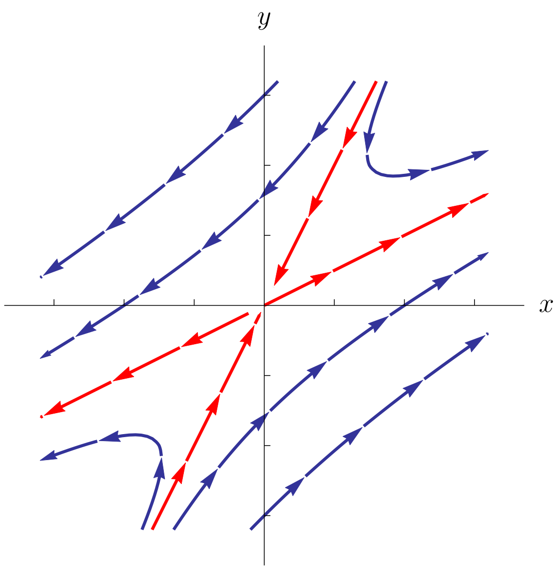
$$(D+1)(D-2)^2 y = 0,$$

isto é,
$$y = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} + c_3te^{2t}.$$
Substituindo esta expressão para y na equação original, obtém-se
$$(D+1)(D-2)(c_1e^{-t} + c_2e^{2t} + c_3te^{2t}) = e^{2t}$$
$$\Leftrightarrow\ (D+1)(D-2)(c_3te^{2t}) = e^{2t}.$$
Logo,
$$(D+1)(c_3e^{2t}) = 3c_3e^{2t} = e^{2t}$$
e $c_3 = \frac{1}{3}$. A solução geral da equação do enunciado é
$$y(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} + \frac{te^{2t}}{3}.$$

4.

a) O polinómio característico da matriz do sistema é
$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2).$$
A solução geral do sistema é
$$X(t) = c_1e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2e^{2t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
A solução do sistema que satisfaz a condição inicial é
$$X(t) = \frac{-x_0 + 2y_0}{3}e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{2x_0 - y_0}{3}e^{2t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b)



5. Para cada t, prolonga-se u como função ímpar em x e periódica em x, de período 2π. Em particular, u_0 também fica ímpar. Então, para cada t fixo, desenvolvendo $x \mapsto u(x,t)$ em série de Fourier,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin(nx).$$

As condições fronteira estão formalmente satisfeitas. Substituindo na equação diferencial, vem

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n''(t)\sin(nx) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n(t)\sin(nx) + 2te^{-4t}\sin(2x).$$

Usando a unicidade dos coeficientes de Fourier,

$$\begin{cases} b_2'(t) = -4b_2(t) + 2te^{-4t}, & \\ b_n'(t) = -n^2 b_n(t) & \text{para } n \neq 2. \end{cases}$$

A equação para b_2 é linear. Obtém-se

$$\frac{d}{dt}(e^{4t}b_2(t)) = 2t,$$

o que implica

$$e^{4t}b_2(t) = t^2 + c_2.$$

Assim,

$$b_2(t) = c_2e^{-4t} + t^2e^{-4t}.$$

A expressão para os outros b_n's é

$$b_n(t) = c_n e^{-n^2t} \quad \text{para } n \neq 2.$$

Portanto, obtém-se

$$u(x,t) = t^2e^{-4t}\sin(2x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2t}\sin(nx). \tag{1}$$

A equação diferencial está formalmente satisfeita. Resta garantir a condição inicial:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) = u_0(x).$$

A última igualdade mostra que os c_n's devem ser os coeficientes de Fourier de u_0. Logo,

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_0(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_0(x)\sin(nx)\,dx.$$

A solução do problema é (1) com estes c_n's.

6. O problema de valor inicial é equivalente a

$$y(t) = \int_0^t [y^2(s) + 4s^3]\, ds = t^4 + \int_0^t y^2(s)\, ds$$

Escolhe-se $y_0(t) \equiv 0$. As iteradas de Picard são definidas por recorrência de acordo com

$$y_{n+1}(t) = t^4 + \int_0^t y_n^2(s)\, ds.$$

Assim,

$$y_1(t) = t^4 + \int_0^t y_0^2(s)\, ds = t^4$$

e

$$y_2(t) = t^4 + \int_0^t y_1^2(s)\, ds = t^4 + \int_0^t (s^4)^2\, ds = t^4 + \frac{t^9}{9}.$$