Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Teste - 21 de Dezembro de 2013

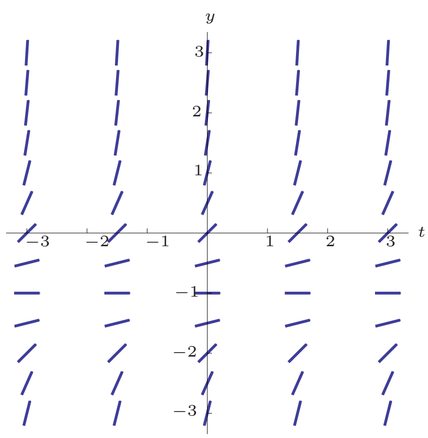
LEGM e MEC

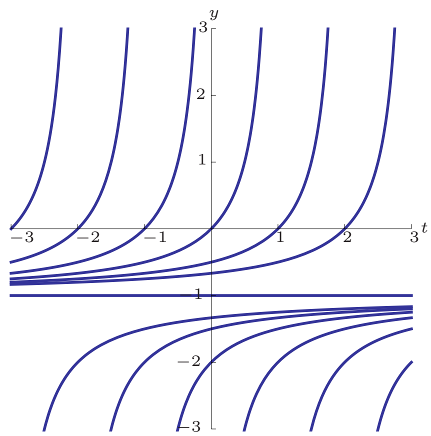
Resolução

versão **A**

1.

a)





b) Vem

$$\frac{y'}{(y+1)^2} = 1,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{y+1} = -1,$$

$$\frac{1}{y+1} - 1 = -t + t_0,$$

$$y = -1 - \frac{1}{t - t_0 - 1}.$$

O domínio das solução é $]-\infty, t_0 + 1[$.

2. Um factor integrante é $e^{\int \frac{1}{t}\,dt} = |t|$. Podemos usar t como factor integrante. Multiplicando ambos os membros das equação diferencial por t, obtém-se

$$ty' + y = 3t^2.$$

Reconhecemos no primeiro membro a derivada do factor integrante vezes y:

$$\frac{d}{dt}(ty) = 3t^2.$$

Integrando ambos os membros de 1 a t e usando a condição inicial $y(1) = 2$, vem

$$ty - 2 = t^3 - 1 \;\Leftrightarrow\; y = t^2 + \frac{1}{t}.$$

3. O operador $D + 1$ aniquila $t \mapsto 2e^{-t}$. Se y é uma solução da equação diferencial, então

$$(D + 1)(D^2 + 1)y = 0,$$

isto é,

$$y = ce^{-t} + d\cos(t) + e\sin(t).$$

Substituindo esta expressão para y na equação original, obtém-se

$$\begin{aligned}(D^2 + 1)(ce^{-t} + d\cos(t) + e\sin(t)) &= 2e^{-t}\\ \Leftrightarrow\;(D^2 + 1)(ce^{-t}) &= 2e^{-t}.\end{aligned}$$

Logo, $c = 1$. A solução geral da equação do enunciado é

$$y(t) = e^{-t} + d\cos(t) + e\sin(t).$$

4.

a) O polinómio característico da matriz do sistema é

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1).$$

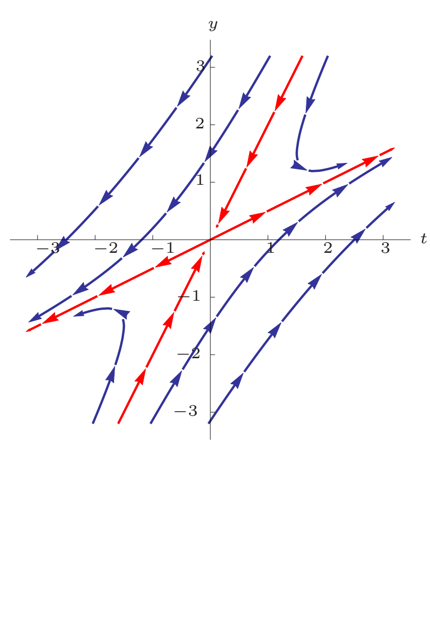
A solução geral do sistema é

$$X(t) = c_1 e^{-2t}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + c_2 e^{t}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}.$$

A solução do sistema que satisfaz a condição inicial é

$$X(t) = \frac{-x_0 + 2y_0}{3}e^{-2t}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + \frac{2x_0 - y_0}{3}e^{t}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}.$$

b)



5. Para cada t, prolonga-se u como função ímpar em x e periódica em x, de período 2π. Em particular, u_0 também fica ímpar. Então, para cada t fixo, desenvolvendo $x \mapsto u(x,t)$ em série de Fourier,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin(nx).$$

As condições fronteira estão formalmente satisfeitas. Substituindo na equação diferencial, vem

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n''(t)\sin(nx) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n(t)\sin(nx) + 2e^{-t}\sin x.$$

Usando a unicidade dos coeficientes de Fourier,

$$\begin{cases} b_1''(t) = -b_1(t) + 2e^{-t}, & \\ b_n''(t) = -n^2 b_n(t) & \text{para } n \geq 2. \end{cases}$$

Usando o resultado da Pergunta **3.**, a expressão para os b_n's é

$$\begin{cases} b_1(t) = e^{-t} + c_1\cos(t) + d_1\sin(t), & \\ b_n(t) = c_n\cos(nt) + \frac{d_n}{n}\sin(nt) & \text{para } n \geq 2. \end{cases}$$

Portanto, obtém-se

$$u(x,t) \quad = \quad e^{-t}\sin x + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n\cos(nt) + \tfrac{d_n}{n}\sin(nt)\right]\sin(nx).$$

A equação diferencial está formalmente satisfeita. Resta garantir as condições iniciais. Uma vez que

$$u(x,0) = \sin x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\sin(nx),$$

deve escolher-se $c_3 = 1$ e os outros c_n nulos. E uma vez que

$$u_t(x,0) = -\sin x + \sum_{n=1}^{\infty} d_n\sin(nx),$$

devem escolher-se os d_n nulos. A solução é igual a

$$u(x,t) = e^{-t}\sin x + \cos(3t)\sin(3x).$$

6. A projecção de f no subespaço de $L^2[-\pi, \pi]$ gerado por $x \mapsto 1$ e $x \mapsto \sin(2x)$ é

$$a_0 \times 1 + b_2 \sin(2x)$$

com

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \times 1 \, dx = 0$$

e

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(2x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(2x) \, dx \\ &= -\frac{1}{\pi} x \cos(2x) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(2x) \, dx = -1. \end{aligned}$$

Logo, a projecção de f no subespaço de $L^2[-\pi, \pi]$ gerado por $x \mapsto 1$ e $x \mapsto \sin(2x)$ é

$$-\sin(2x).$$

A componente de f ortogonal ao subespaço de $L^2[-\pi, \pi]$ gerado por $x \mapsto 1$ e $x \mapsto \sin(2x)$ é igual a

$$f(x) - (-\sin(2x)) = x + \sin(2x).$$