Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Teste - 25 de Maio de 2013

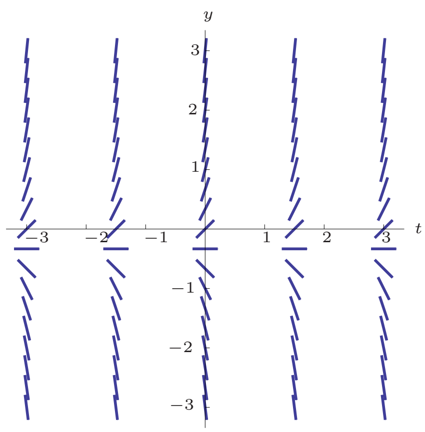
MEEC

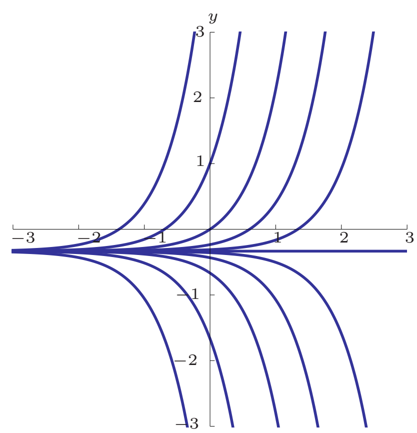
Resolução

versão **B**

1.

a)





b) Para $y \neq -\frac{1}{3}$, vem

$$\frac{y'}{3y+1} = 1,$$

$$\frac{d}{dt} \ln|3y+1| = 3,$$

$$\ln\left|\frac{3y+1}{3y_0+1}\right| = 3t,$$

$$\frac{3y+1}{3y_0+1} = e^{3t},$$

$$y(t) = -\frac{1}{3} + \left(y_0 + \frac{1}{3}\right)e^{3t}.$$

Esta formula é válida para todo o y_0, mesmo igual a $-\frac{1}{3}$.

c) A fórmula canónica é

$$y' - 3y = 1.$$

O factor integrante é e^{-3t}. A equação pode escrever-se na forma

$$\frac{d}{dt}(e^{-3t}y) = e^{-3t}.$$

Integrando de 0 a t e usando a condição inicial, obtém-se

$$e^{-3t}y(t) - y_0 = -\frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3},$$

ou

$$y(t) = -\frac{1}{3} + \Big(y_0 + \frac{1}{3}\Big)e^{3t}.$$

2. O aniquilador de $t \mapsto 4\cos(t)$ é o operador D^2+1. Se y é uma solução da equação diferencial, então

$$(D^2+1)(D+4)y = 0,$$

isto é,

$$y = ce^{-4t} + d\cos(t) + e\sin(t).$$

Substituindo esta expressão para y na equação original, obtém-se

$$\begin{aligned} &(D+4)(ce^{-4t} + d\cos(t) + e\sin(t)) = 4\cos(t) \\ \Leftrightarrow\ &(D+4)(d\cos(t) + e\sin(t)) = 4\cos(t). \end{aligned}$$

Logo,

$$-d\sin(t) + e\cos(t) + 4d\cos(t) + 4e\sin(t) = 4\cos(t).$$

Daqui tira-se $4d + e = 4$ e $-d + 4e = 0$, ou seja,

$$d = \frac{16}{17}, \qquad e = \frac{4}{17}.$$

A solução geral da equação do enunciado é

$$y(t) = ce^{-4t} + \frac{16}{17}\cos(t) + \frac{4}{17}\sin(t).$$

3.

a) O polinómio característico da matriz, A, do sistema é

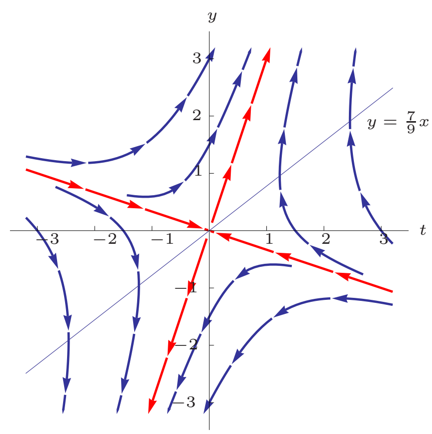
$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1).$$

$$A = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -7 & 9 \\ 9 & 17 \end{bmatrix} = S\Lambda S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$X(t) = e^{At}X_0 = \frac{x_0+3y_0}{10}e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{3x_0 - y_0}{10}e^{-t}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

b) As trajectórias são verticais nos pontos $X = [x\ y]^T$ tais que $X' = AX$ tem primeira coordenada nula, ou seja, $-7x + 9y = 0$.



4. Para cada t, prolonga-se u como função ímpar em x e periódica em x, de período 2π. Em particular, u_0 também fica ímpar. Então, para cada t fixo, desenvolvendo $x \mapsto u(x,t)$ em série de Fourier,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(nx).$$

As condições fronteira estão formalmente satisfeitas. Substituindo na equação diferencial, vem

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t) \sin(nx) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n(t) \sin(nx) + 4\cos(t)\sin(2x).$$

Usando a unicidade dos coeficientes de Fourier,

$$\begin{cases} b_2'(t) = -4b_2(t) + 4\cos(t), & \\ b_n'(t) = -n^2 b_n(t) & \text{para } n \neq 2. \end{cases}$$

Usando o resultado da Pergunta **2.**, a expressão para os b_n's é

$$\begin{cases} b_2(t) = \left(c_2 - \frac{16}{17}\right)e^{-4t} + \frac{16}{17}\cos(t) + \frac{4}{17}\sin(t), & \\ b_n(t) = c_n e^{-n^2 t} & \text{para } n \neq 2. \end{cases}$$

Portanto, obtém-se

$$\begin{aligned} u(x,t) &= c_1 e^{-t}\sin x + \left[\left(c_2 - \frac{16}{17}\right)e^{-4t} + \frac{16}{17}\cos(t) + \frac{4}{17}\sin(t)\right]\sin(2x) \\ &\quad + \sum_{n=3}^{\infty} c_n e^{-n^2 t}\sin(nx). \end{aligned}$$

A equação diferencial está formalmente satisfeita. Resta garantir a condição inicial. Uma vez que

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx),$$

devem escolher-se as constantes c_n de acordo com

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_0(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_0(x)\sin(nx)\,dx.$$

5. Para que a equação

$$\mu(ty)(3y + 7t^4y^4) + \mu(ty)(3t + 6t^5y^3)y' = 0$$

seja exacta, deve ter-se

$$\frac{d}{dy}[\mu(ty)(3y + 7t^4y^4)] = \frac{d}{dt}[\mu(ty)(3t + 6t^5y^3)] \;\Leftrightarrow$$

$$\mu(ty)(3+28t^4y^3)+\mu'(ty)(3ty+7t^5y^4) = \mu(ty)(3+30t^4y^3)+\mu'(ty)(3ty+6t^5y^4),$$

ou seja,

$$2t^4y^3\mu(ty) = t^5y^4\mu'(ty) \;\Leftrightarrow\; 2\mu(ty) = ty\mu'(ty) \;\Leftrightarrow\; 2\mu(s) = s\mu'(s).$$

Conclui-se que $\mu(s) = s^2$, isto é, $\mu(ty) = t^2y^2$ é factor integrante da equação diferencial. Portanto, a equação

$$(3t^2y^3 + 7t^6y^6) + (3t^3y^2 + 6t^7y^5)y' = 0$$

é exacta. A suas soluções satisfazem

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dt}[\phi(t,y(t))] = 0 \;\Leftrightarrow\; \phi(t,y(t)) = c,$$

onde

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = 3t^2y^3 + 7t^6y^6 \quad \text{e} \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = 3t^3y^2 + 6t^7y^5.$$

Determinando ϕ, conclui-se

$$\phi = t^3y^3 + t^7y^6 = c,$$

onde c é constante.