

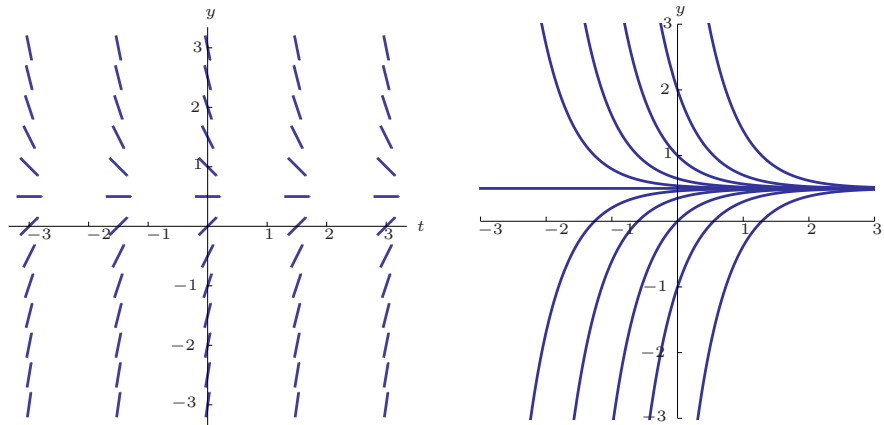
Análise Complexa e Equações Diferenciais
2º Teste - 25 de Maio de 2013
MEEC

Resolução

versão A

1.

a)



b) Para $y \neq \frac{1}{2}$, vem

$$\frac{y'}{-2y + 1} = 1,$$

$$\frac{d}{dt} \ln |-2y + 1| = -2,$$

$$\ln \left| \frac{-2y + 1}{-2y_0 + 1} \right| = -2t,$$

$$\frac{-2y + 1}{-2y_0 + 1} = e^{-2t},$$

$$y(t) = \frac{1}{2} + \left(y_0 - \frac{1}{2} \right) e^{-2t}.$$

Esta fórmula é válida para todo o y_0 , mesmo igual a $\frac{1}{2}$.

c) A fórmula canónica é

$$y' + 2y = 1.$$

O factor integrante é e^{2t} . A equação pode escrever-se na forma

$$\frac{d}{dt}(e^{2t}y) = e^{2t}.$$

Integrando de 0 a t e usando a condição inicial, obtém-se

$$e^{2t}y(t) - y_0 = \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2},$$

ou

$$y(t) = \frac{1}{2} + \left(y_0 - \frac{1}{2}\right)e^{-2t}.$$

2. O aniquilador de $t \mapsto \sin(t)$ é o operador $D^2 + 1$. Se y é uma solução da equação diferencial, então

$$(D^2 + 1)(D + 4)y = 0,$$

isto é,

$$y = ce^{-4t} + d \cos(t) + e \sin(t).$$

Substituindo esta expressão para y na equação original, obtém-se

$$\begin{aligned} (D + 4)(ce^{-4t} + d \cos(t) + e \sin(t)) &= \sin(t) \\ \Leftrightarrow (D + 4)(d \cos(t) + e \sin(t)) &= \sin(t). \end{aligned}$$

Logo,

$$-d \sin(t) + e \cos(t) + 4d \cos(t) + 4e \sin(t) = \sin(t).$$

Daqui tira-se $4d + e = 0$ e $-d + 4e = 1$, ou seja,

$$d = -\frac{1}{17}, \quad e = \frac{4}{17}.$$

A solução geral da equação do enunciado é

$$y(t) = ce^{-4t} - \frac{1}{17} \cos(t) + \frac{4}{17} \sin(t).$$

3.

a) O polinómio característico da matriz, A , do sistema é

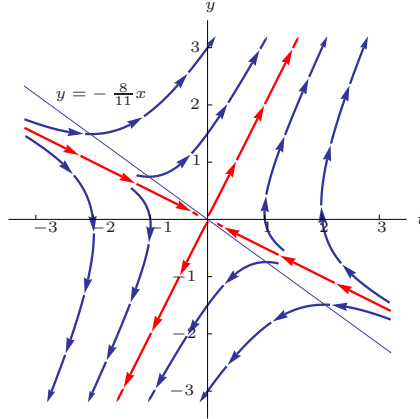
$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1).$$

$$A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 8 & 11 \end{bmatrix} = S\Lambda S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$X(t) = e^{At} X_0 = \frac{x_0 + 2y_0}{5} e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{2x_0 - y_0}{5} e^{-t} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- b) As trajectórias são horizontais nos pontos $X = [x \ y]^T$ tais que $X' = AX$ tem segunda coordenada nula, ou seja, $8x + 11y = 0$.



4. Para cada t , prolonga-se u como função ímpar em x e periódica em x , de período 2π . Em particular, u_0 também fica ímpar. Então, para cada t fixo, desenvolvendo $x \mapsto u(x, t)$ em série de Fourier,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(nx).$$

As condições fronteira estão formalmente satisfeitas. Substituindo na equação diferencial, vem

$$\sum_{n=1}^{\infty} b'_n(t) \sin(nx) = - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n(t) \sin(nx) + \sin(t) \sin(2x).$$

Usando a unicidade dos coeficientes de Fourier,

$$\begin{cases} b'_2(t) = -4b_2(t) + \sin(t), \\ b'_n(t) = -n^2 b_n(t) \end{cases} \quad \text{para } n \neq 2.$$

Usando o resultado da Pergunta 2., a expressão para os b_n 's é

$$\begin{cases} b_2(t) = \left(c_2 + \frac{1}{17}\right)e^{-4t} - \frac{1}{17} \cos(t) + \frac{4}{17} \sin(t), \\ b_n(t) = c_n e^{-n^2 t} \end{cases} \quad \text{para } n \neq 2.$$

Portanto, obtém-se

$$\begin{aligned} u(x, t) &= c_1 e^{-t} \sin x + \left[\left(c_2 + \frac{1}{17}\right)e^{-4t} - \frac{1}{17} \cos(t) + \frac{4}{17} \sin(t) \right] \sin(2x) \\ &\quad + \sum_{n=3}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \sin(nx). \end{aligned}$$

A equação diferencial está formalmente satisfeita. Resta garantir a condição inicial. Uma vez que

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx),$$

devem escolher-se as constantes c_n de acordo com

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_0(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \sin(nx) dx.$$

5. Para que a equação

$$\mu(ty)(3y + 6t^3y^5) + \mu(ty)(3t + 7t^4y^4)y' = 0$$

seja exacta, deve ter-se

$$\frac{d}{dy}[\mu(ty)(3y + 6t^3y^5)] = \frac{d}{dt}[\mu(ty)(3t + 7t^4y^4)] \Leftrightarrow$$

$$\mu(ty)(3 + 30t^3y^4) + \mu'(ty)(3ty + 6t^4y^5) = \mu(ty)(3 + 28t^3y^4) + \mu'(ty)(3ty + 7t^4y^5),$$

ou seja,

$$2t^3y^4\mu(ty) = t^4y^5\mu'(ty) \Leftrightarrow 2\mu(ty) = ty\mu'(ty) \Leftrightarrow 2\mu(s) = s\mu'(s).$$

Conclui-se que $\mu(s) = s^2$, isto é, $\mu(ty) = t^2y^2$ é factor integrante da equação diferencial. Portanto, a equação

$$(3t^2y^3 + 6t^5y^7) + (3t^3y^2 + 7t^6y^6)y' = 0$$

é exacta. A suas soluções satisfazem

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}[\phi(t, y(t))] = 0 \Leftrightarrow \phi(t, y(t)) = c,$$

onde

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = 3t^2y^3 + 6t^5y^7 \quad \text{e} \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = 3t^3y^2 + 7t^6y^6.$$

Determinando ϕ , conclui-se

$$\phi = t^3y^3 + t^6y^7 = c,$$

onde c é constante.