Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Teste - 17 de Dezembro de 2011

LMAC, MEBiom e MEFT

Resolução

1.

a) A equação diferencial é separável. Pode ser escrita na forma canónica

$$\frac{y'}{y^2+1} = -\frac{1}{x}.$$

Obtém-se

$$\frac{d}{dy}(\arctan y)\,\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}\arctan y = -\frac{1}{x}.$$

Integrando ambos os membros de e a x, vem

$$\int_e^x \frac{d}{ds}\arctan y(s)\,ds = -\int_e^x \frac{1}{s}\,ds \;\Leftrightarrow\; \arctan y(x) - \arctan y(e) = -\ln x + 1.$$

Usando a condição inicial $y(e) = 1$ e resolvendo em ordem a y, obtém-se

$$y(x) = \tan\left(\tfrac{\pi}{4} + 1 - \ln x\right).$$

b) A solução existe enquanto

$$-\tfrac{\pi}{2} < \tfrac{\pi}{4} + 1 - \ln x < \tfrac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; e^{1-\frac{\pi}{4}} < x < e^{1+\frac{3\pi}{4}}.$$

2.

a) A forma canónica da equação diferencial linear é

$$y' + \frac{2}{x^2-1}y = \frac{x+1}{x-1}$$

Um factor integrante é

$$\exp\left(\int \tfrac{2}{x^2-1}\,dx\right) = \exp\left(\int \left(\tfrac{1}{x-1} - \tfrac{1}{x+1}\right)dx\right) = \exp\left(\ln\left|\tfrac{x-1}{x+1}\right|\right) = \left|\tfrac{x-1}{x+1}\right|.$$

No intervalo $x \in]-1,1[$, este factor integrante vale $\frac{1-x}{1+x}$.

b) Multiplicando ambos os membros da equação diferencial dada pelo factor integrante, obtém-se

$$\frac{1-x}{1+x}y' - \frac{2}{(x+1)^2}y = -1.$$

Reconhece-se no primeiro membro a derivada do factor integrante vezes y, ou seja, a equação pode escrever-se na forma

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x}{1+x}y\right) = -1.$$

Integrando ambos os membros de 0 a x e usando a condição inicial $y(0) = 1$, vem

$$\frac{1-x}{1+x}y(x) - y(0) = -x \ \Leftrightarrow\ y(x) = 1 + x.$$

3.

a) O polinómio característico é

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr} A\, \lambda + \det A = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda+2)(\lambda-3).$$

A matriz A tem o valor próprio -2 com vector próprio $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ associado, e tem o valor próprio 3 com vector próprio $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ associado. Pode escolher-se

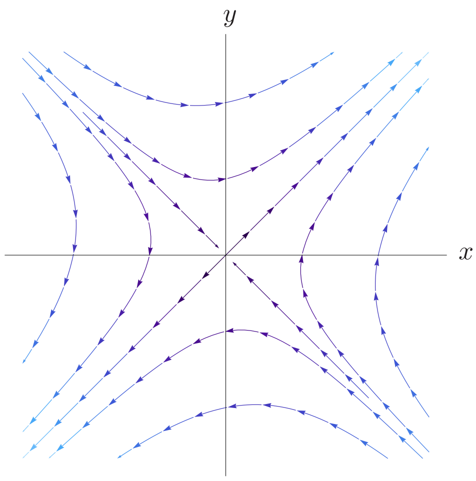
$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

A inversa de S é $S^{-1} = S^T = S$. Calculando o produto $S\Lambda S^{-1}$ obtém-se A.

b) A solução do sistema que satisfaz $X(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ é

$$X(t) = e^{At}X_0 = Se^{\Lambda t}S^{-1}X_0 = \frac{x_0 - y_0}{2}e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{x_0 + y_0}{2}e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

c)



4.

a) Estende-se u como função ímpar em x e periódica, de período 2π. Para cada t fixo, o desenvolvimento de $u(\,\cdot\,,t)$ em série de Fourier é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin(nx).$$

Com a função u desta forma, as condições fronteira estão formalmente satisfeitas. Substitua-se a série para u na equação diferencial $u_t = -u_{xxxx}$. Obtém-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t)\sin(nx) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^4 b_n(t)\sin(nx).$$

Usando a unicidade dos coeficientes de Fourier, para todo o n natural, deve ter-se

$$b_n'(t) = -n^4 b_n(t).$$

Logo, vem

$$b_n(t) = c_n e^{-n^4 t},$$

onde c_n são constantes. Substituindo os b_n's na expressão para u, chega-se a

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^4 t}\sin(nx). \qquad (1)$$

Resta garantir a condição inicial. Atendendo a

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx),$$

esta soma deve coincidir com $u_0(x)$. A função u_0 herda a extensão de u, ímpar em x e periódica, de período 2π. Portanto, é possível garantir que $u(x,0)$ coincida com $u_0(x)$ desde que os coeficientes c_n sejam dados por

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_0(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_0(x)\sin(nx)\,dx. \tag{2}$$

Uma solução do problema é dada por (1) com os coeficientes c_n definidos por (2).

b) Comparando os valores fornecidos para $u(0,0)$ pela condição fronteira e pela condição inicial, obtém-se

$$u_0(0) = 0. \tag{3}$$

Analogamente, comparando os valores fornecidos para $u(\pi,0)$, obtém-se

$$u_0(\pi) = 0. \tag{4}$$

Derivando duas vezes a condição inicial em ordem a x, vem $u_{xx}(x,0) = u_0''(x)$. Comparando os valores fornecidos para $u_{xx}(0,0)$ pela condição fronteira e pela condição inicial, obtém-se

$$u_0''(0) = 0. \tag{5}$$

Analogamente, comparando os valores fornecidos para $u_{xx}(\pi,0)$, obtém-se

$$u_0''(\pi) = 0. \tag{6}$$

Derivando quatro vezes a condição inicial em ordem a x, vem $u_{xxxx}(x,0) = u_0^{(iv)}(x)$. Derivando uma vez as condições fronteira $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ em ordem a t, vem $u_t(0,t) = u_t(\pi,t) = 0$. Usando a equação diferencial $u_t = -u_{xxxx}$ nos pontos $(0,0)$ e $(\pi,0)$, obtém-se

$$u_0^{(iv)}(0) = 0 \tag{7}$$

e

$$u_0^{(iv)}(\pi) = 0. \tag{8}$$

As condições de compatibilidade são as igualdades (3)$-$(8).

c) Seja v definida em $[-\pi,0]\times[0,+\infty[$ por

$$v(x,t) = -u(-x,t).$$

A função v pertence a

$$\big\{u \in C^1([-\pi,0]\times[0,+\infty[) \ : u_{xxxx} \text{ existe e } u_{xxxx} \in C^0([-\pi,0]\times[0,+\infty[)\big\}.$$

A extensão ímpar em x de u é

$$\tilde{u}(x,t) \;=\; \begin{cases} v(x,t) & \text{para } (x,t) \in [-\pi, 0[\times[0,+\infty[, \\ u(x,t) & \text{para } (x,t) \in [0,\pi] \times [0,+\infty[. \end{cases}$$

Tem-se $v(0,t) = -u(0,t) = 0$, pelo que $\tilde{u}$ é contínua em $(0,t)$. Como

$$v_x(x,t) = u_x(-x,t),$$

tem-se $v_x(0,t) = u_x(0,t)$, pelo que a função $\tilde{u}$ tem primeira derivada em ordem a x contínua. Como

$$v_t(x,t) = -u_t(x,t),$$

tem-se $v_t(0,t) = -u_t(0,t) = 0$, pelo que a função $\tilde{u}$ tem primeira derivada em ordem a t contínua. Como

$$v_{xx}(x,t) = -u_{xx}(-x,t),$$

tem-se $v_{xx}(0,t) = -u_{xx}(0,t) = 0$, pelo que a função $\tilde{u}$ tem segunda derivada em ordem a x contínua. Como

$$v_{xxx}(x,t) = u_{xxx}(-x,t),$$

tem-se $v_{xxx}(0,t) = u_{xxx}(0,t)$, pelo que a função $\tilde{u}$ tem terceira derivada em ordem a x contínua. Como

$$v_{xxxx}(x,t) = -u_{xxxx}(-x,t),$$

tem-se $v_{xxxx}(0,t) = -u_{xxxx}(0,t) = u_t(0,t) = 0$, pelo que a função $\tilde{u}$ tem quarta derivada em ordem a x contínua.
Uma análise idêntica aplica-se à semirecta (π,t) para $t \in [0,+\infty[$.
A função extensão periódica de $\tilde{u}$, de período 2π, pertence ao espaço

$$\big\{u \in C^1(]-\infty,+\infty[\times[0,+\infty[) \,:\, u_{xxxx} \text{ existe e } u_{xxxx} \in C^0(]-\infty,+\infty[\times[0,+\infty[)\big\}.$$