

Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Teste - 16 de Dezembro de 2017

MEC

Duração: 90 minutos

Apresente os cálculos

1. Considere a equação diferencial

$$y' = y^2 - y.$$

Esboce o seu campo de direcções e os gráficos das soluções. (3)

2. Resolva a equação diferencial (3)

$$y' + \frac{y}{t+1} = \frac{1}{(t+1)^4},$$

com condição inicial $y(0) = 0$, obtendo explicitamente y em função de t .

3. Considere o sistema

$$X' = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & -8 \end{bmatrix} X.$$

a) Determine a solução que no instante $t = 0$ vale $X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$. (2)

b) Esboce o retrato de fase do sistema. (2)

4. Determine a solução geral de (3)

$$y'' - 4y = 4e^{-2t} - t.$$

5. Considere o problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 3u & \text{para } (x, t) \in [0, \pi] \times [0, \infty[, \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 & \text{para } t \in [0, \infty[, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{para } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

a) Determine formalmente uma solução quando $u_0(x) = 2 - 3 \cos(4x)$. (3)

b) Estude o sinal de (2)

$$\frac{d}{dt} \int_0^\pi u_x^2(x, t) dx$$

para uma função u_0 genérica.

6. Determine as soluções de (2)

$$y' = \frac{\sin^3 x}{y \ln y}.$$