

Análise Complexa e Equações Diferenciais
2º Teste - 17 de Dezembro de 2016
LEMat e MEAer

Duração: 90 minutos
Apresente os cálculos

1. Considere a equação diferencial

$$y' = e^{-(t-y)^2/4}.$$

Esboce o seu campo de direcções e os gráficos das soluções. (3)

2. Resolva a equação diferencial (3)

$$y' = \frac{y^3}{t-1},$$

com condição inicial $y(0) = 1$, obtendo explicitamente y em função de t .

3. Determine a solução de (3)

$$y'' - 4y = t^2$$

que satisfaz $y(0) = y'(0) = 0$.

4. Considere o sistema

$$X' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X.$$

- a) Determine a solução que no instante $t = 0$ vale $X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$. (2)

- b) Esboce o retrato de fase do sistema, indicando a direcção assintótica das trajectórias quando se aproximam da origem. (2)

5. Considere o problema (4)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + (4t + 1) \cos(2x) & \text{para } (x, t) \in [0, \pi] \times [0, \infty[, \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 & \text{para } t \in [0, \infty[, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{para } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Determine formalmente uma solução.

6. Seja $X(\cdot)$ uma solução do sistema da pergunta 4.

- a) Calcule para que vectores de X , da forma $\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$, $\frac{d}{dt} \|X\|^2$ tem o seu valor máximo (ou seja, mínimo em módulo). Qual é o valor desse máximo? (1.5)

- b) Suponha que $X(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ y_0 \end{bmatrix}$, com $y_0 > 0$. Determine o valor máximo da primeira coordenada de X em termos de y_0 . (1.5)