Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Teste - 21 de Dezembro de 2013

LEGM e MEC

Duração: 90 minutos

Apresente os cálculos

versão **A**

1. Considere a equação diferencial

$$y' = (y+1)^2.$$

a) Esboce o seu campo de direcções e os gráficos das soluções. (2)

b) Determine a solução da equação diferencial que satisfaz $y(t_0) = 0$. Qual o domínio da solução? (2.5)

2. Resolva (2.5)

$$y' + \frac{1}{t}y = 3t,$$

com condição inicial $y(1) = 2$.

3. Resolva usando o método do aniquilador (2.5)

$$y'' + y = 2e^{-t}.$$

4. Considere o sistema

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} X.$$

a) Determine a solução que no instante $t = 0$ vale $X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$. (2.5)

b) Esboce o retrato de fase do sistema. (2)

5. Considere o problema (4)

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2e^{-t}\sin x & \text{para } (x,t) \in [0,\pi] \times [0,\infty[, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{para } t \in [0,\infty[, \\ u(x,0) = \sin x + \sin(3x) & \text{para } x \in [0,\pi], \\ u_t(x,0) = -\sin x & \text{para } x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Determine formalmente uma solução.

6. Considere a função $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. Determine a componente de f ortogonal ao subespaço de $L^2[-\pi,\pi]$ gerado por $x \mapsto 1$ e $x \mapsto \sin(2x)$. Justifique. (2)