Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Teste - 22 de Dezembro de 2012

LMAC, MEBiom e MEFT

Duração: 90 minutos

Apresente os cálculos

1. Considere a equação diferencial

$$y' = \frac{y}{y^2+1}.$$

a) Esboce o seu campo de direcções e os gráficos das soluções. (2)

b) O Teorema de Picard-Lindelöf garante unicidade de solução de um problema de valor inicial para esta equação? Justifique. (0.5)

c) Resolva a equação. Não precisa de explicitar y como função de t. (2)

d) Calcule y'' (em termos de y). (0.5)

2. Seja $y_0 \in \mathbb{R}$. Determine a solução do problema de valor inicial (3)

$$\begin{cases} y' - \frac{2t}{1+t^2} y = -1, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Para que valores de y_0 se tem $y(t) \geq 0$ para todo o t?

3. Considere o sistema

$$X' = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} X.$$

a) Determine a solução que no instante $t = 0$ vale $X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$. (3)

b) Esboce o retrato de fase do sistema. Em que pontos são as trajectórias horizontais? (1.5)

4. Considere o problema

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 5e^{-t}\sin(2x) & \text{para } (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{para } t \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 0 & \text{para } x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

a) Determine formalmente as soluções do problema. (3.5)

b) Seja u_0 de classe $C^3[0,\pi]$. Determine formalmente a solução do problema que satisfaz (1.5)

$$u(x,0) = \sin(2x) + u_0(x) \quad \text{para } x \in [0,\pi].$$

c) Determine as condições de compatibilidade para a função u_0. (0.5)

5. Fixe-se $l > 0$.

a) Seja $u \in C^1([0,l] \times [0,+\infty[)$ tal que $u_{xx} \in C^0([0,l] \times [0,+\infty[)$ uma solução de (1)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{para } (x,t) \in [0,l] \times [0,+\infty[, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & \text{para } t \in [0,+\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{para } x \in [0,l]. \end{cases}$$

Prove rigorosamente que se u_0 é par em torno de $l/2$, então $u(\,\cdot\,,t)$ é par em torno de $l/2$ para todo o $t > 0$. Pode usar o resultado de unicidade demonstrado na aula.

b) Seja $u \in C^2([-l,l] \times \mathbb{R})$ uma solução de (1)

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & \text{para } (x,t) \in [-l,l] \times \mathbb{R}, \\ u(-l,t) = u(l,t) = 0 & \text{para } t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{para } x \in [-l,l], \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{para } x \in [-l,l]. \end{cases}$$

Dê uma condição necessária e suficiente para que simultaneamente $u(\,\cdot\,,t)$ seja par para todo o $t \in \mathbb{R}$ e $u(x,\,\cdot\,)$ seja par para todo o $x \in [-l,l]$ e prove a equivalência em causa. Pode usar o resultado de unicidade demonstrado na aula.