Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Teste - 17 de Dezembro de 2011

LMAC, MEBiom e MEFT

Duração: 90 minutos

Apresente os cálculos

1. Considere a equação diferencial de primeira ordem

$$y^2 + xy' + 1 = 0$$

para $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

a) Determine a solução que satisfaz $y(e) = 1$. Simplifique a resposta. (3)

b) Qual o intervalo máximo de existência da solução? (1)

2. Considere a equação diferencial linear de primeira ordem

$$(x^2 - 1)y' + 2y = (x + 1)^2$$

para $(x, y) \in]-1, 1[\times \mathbb{R}$.

a) Determine um factor integrante. Simplifique a resposta. (2)

b) Determine a solução que satisfaz $y(0) = 1$. (2)

3. Considere o sistema $X' = AX$, com

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

a) Decomponha a matriz A na forma $A = S\Lambda S^{-1}$. Verifique a sua resposta. (2)

b) Determine a solução do sistema que satisfaz $X(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$. (2)

c) Esboce o retrato de fase do sistema. (2)

4. Considere o problema

$$\begin{cases} u_t = -u_{xxxx} & \text{para } (x,t) \in [0,\pi] \times [0,+\infty[, \\ u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(\pi,t) = u_{xx}(\pi,t) = 0 & \text{para } t \in [0,+\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{para } x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Suponha que existe uma solução pertencente a

$$\big\{u \in C^1([0,\pi] \times [0,+\infty[) \, : \, u_{xxxx} \text{ existe e } u_{xxxx} \in C^0([0,\pi] \times [0,+\infty[)\big\}.$$

a) Prolongue u ao semiplano $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 0\}$ de modo a obter uma função regular. Para cada t fixo, desenvolva $u(\,\cdot\,, t)$ em série de Fourier. Use essa série para determinar formalmente uma solução do problema. (3)

b) Determine as condições de compatibilidade para este problema. (1.5)

c) Qual a regularidade da extensão de u? Justifique analiticamente. (1.5)