Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Teste - 18 de Dezembro de 2010

LMAC, MEBiom e MEFT

Duração: 90 minutos

Apresente os cálculos

1. Considere a equação diferencial

$$y' = y^2 - 1.$$

a) Esboce o seu campo de direcções e os gráficos das soluções. (2)

b) Determine explicitamente a solução que satisfaz $y(0) = 0$. (3)

2. Determine a solução de (3)

$$\frac{1}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = x \ln x$$

que satisfaz $y(e) = e^2$.

3. Considere o sistema $X' = AX$ em que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Decomponha A na forma $A = S\Lambda S^{-1}$ ou $A = SJS^{-1}$. Determine a solução que satisfaz $X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$. (3)

b) Esboce o retrato de fase do sistema. (2)

4. Determine a solução geral de $y'' + 4y = e^t$. (2)

5. Seja $b > 0$ e $f \in C^3[0, \pi]$ satisfazendo $f(0) = f''(0) = f(\pi) = f''(\pi) = 0$. Determine a solução do problema de valores na fronteira (3)

$$\begin{cases} -\Delta u = u & \text{para } (x, y) \in [0, \pi] \times [0, b], \\ u(x, 0) = 0 & \text{para } x \in [0, \pi], \\ u(0, y) = 0 & \text{para } y \in [0, b], \\ u(\pi, y) = 0 & \text{para } y \in [0, b], \\ u(x, b) = f(x) & \text{para } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

6. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto conexo limitado e $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ satisfazendo (2)

$$\begin{cases} \Delta u = u & \text{em } \Omega, \\ u = f & \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $f \geq 0$. Pode concluir algo acerca do sinal de u? Justifique.