Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Teste - 4 de Novembro de 2017

MEC

Resolução

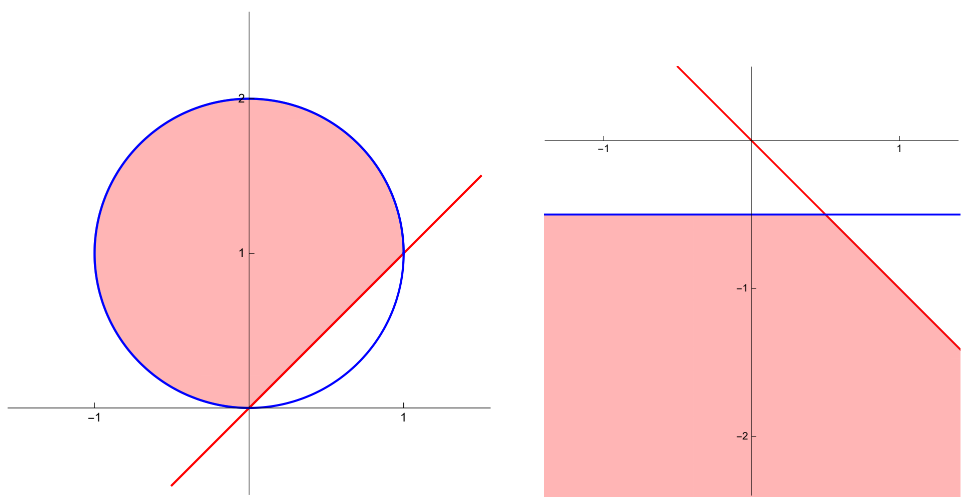
1. $\log\left(\frac{\sqrt{3}\,e}{2} + i\frac{e}{2}\right) = \log(e e^{i\frac{\pi}{6}}) = 1 + i\frac{\pi}{6}$.

2. $e^{iz^2} = e^{-2xy}\cos(x^2-y^2) + ie^{-2xy}\sin(x^2-y^2)$. O módulo é e^{-2xy} e o argumento é x^2-y^2. Para todo o z,

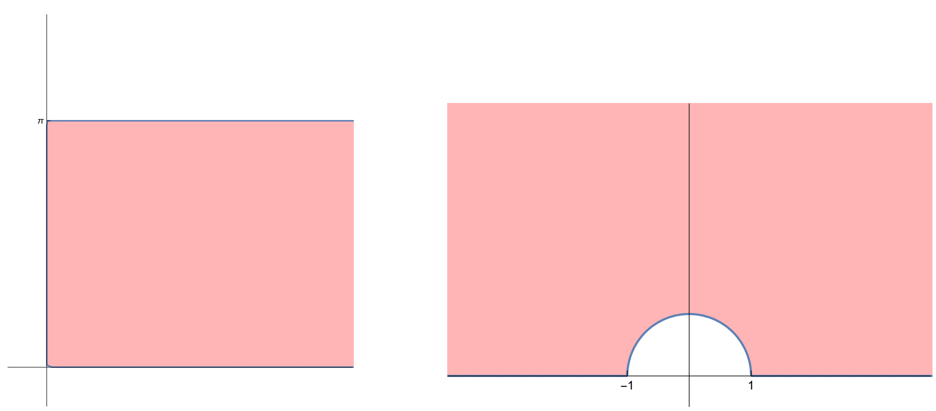
$$e^{iz^2} = 1 + iz^2 - \frac{z^4}{2!} - i\frac{z^6}{3!} + \frac{z^8}{4!} + \dots.$$

3.

a)



b)



4.

$$\int_{|z-1|=1} \overline{z}\, dz \;=\; \int_0^{2\pi} \overline{(1+e^{i\theta})} ie^{i\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} (1+e^{-i\theta}) ie^{i\theta}\, d\theta = 2\pi i.$$

5. Tem-se que

$$f_x = 2ixe^{ix^2}y, \qquad -if_y = -ie^{ix^2}.$$

Como estas derivadas parciais são contínuas, a função é $\mathbb{R}$-diferenciável. Logo, a função é diferenciável nos pontos em que satisfaz a equação de Cauchy-Riemann, $f_x = -if_y$. Isto acontece quando $2xy = -1$, ou seja, $y = -\frac{1}{2x}$. A derivada de f é

$$f'\left(x - i\frac{1}{2x}\right) = f_x\left(x - i\frac{1}{2x}\right) = -ie^{ix^2}.$$

6.

a) Vamos usar

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz,$$

válida para f holomorfa em Ω, com Ω simplesmente conexo, $a \in \Omega$, e γ curva fechada contida em Ω, não passando por a, e dando uma volta em torno do ponto a no sentido directo.
Escolhemos $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > -1\}$, $a = 4$, $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$ e $n = 2$. Obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_{|z-3|=2} g(z)\, dz &= \int_{|z-3|=2} \frac{1/(z+1)^2}{(z-4)^3}\, dz \\
&= \frac{2\pi i}{2}\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{(z+1)^2}\bigg|_{z=4} = \pi i \frac{6}{(z+1)^4}\bigg|_{z=4} = \frac{6\pi i}{5^4} \\
&= \frac{6\pi i}{625}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
g(z) &= \frac{1}{(z-4)^3}\left[f(4) + f'(4)(z-4) + \frac{f''(4)}{2!}(z-4)^2 + \dots\right] \\
&= \frac{f(4)}{(z-4)^3} + \frac{f'(4)}{(z-4)^2} + \frac{f''(4)}{2!(z-4)} + \frac{f'''(4)}{3!} + \dots,
\end{aligned}$$

válido para $0 < |z-4| < 5$. Como $f(4)$ não se anula, g tem um pólo de terceira ordem em 4. O resíduo de g em 4 é $\frac{f''(4)}{2!} = \frac{3}{625}$.

7.

a)

$$\begin{aligned} e^z = e^{-\frac{1}{z}} \quad &\Leftrightarrow \quad e^{z+\frac{1}{z}} = 1 \;\Leftrightarrow\; z + \frac{1}{z} = 2k\pi i \\ &\Leftrightarrow \quad z^2 - 2k\pi i z + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad z = k\pi i \pm \sqrt{-k^2\pi^2 - 1},\; k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad z = i\left(k\pi \pm \sqrt{k^2\pi^2+1}\right),\; k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \text{ ou } z = \pm i. \end{aligned}$$

b) As soluções de parte imaginária positiva são

$$z = i\left(\sqrt{k^2\pi^2+1} + k\pi\right) \quad \text{e} \quad z = i\left(\sqrt{k^2\pi^2+1} - k\pi\right),\; k \in \mathbb{N}.$$

As segundas podem também ser escritas como

$$z = \frac{i}{\sqrt{k^2\pi^2+1} + k\pi},$$

e tendem para 0 quando $k \to +\infty$. Portanto, não existem soluções com parte imaginária positiva de menor módulo.