Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Teste - 5 de Novembro de 2016

LEMat e MEAer

Resolução

1.

a) $(-1+i)^7 = \left(\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)^7 = 8\sqrt{2}e^{\frac{21i\pi}{4}} = -8(1+i)$;

b) $-3+i\pi$;

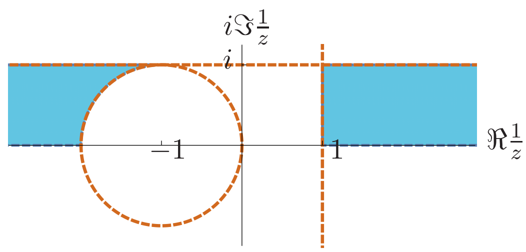
c) $\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{e^{\frac{i\pi}{2}}} = e^{\frac{i\pi}{6}} \vee e^{\frac{5i\pi}{6}} \vee e^{\frac{3i\pi}{2}} = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \vee -i$;

d) se $\Im z = 1$, então $z = x + i$ e

$$|e^{\frac{1}{z}}| = |e^{\frac{x-i}{x^2+1}}| = e^{\frac{x}{x^2+1}};$$

o máximo é atingido para $x = 1$, o que corresponde a $z = 1 + i$.

2.



3.

$$f(re^{i\theta}) = \ln r + i\sin\theta.$$

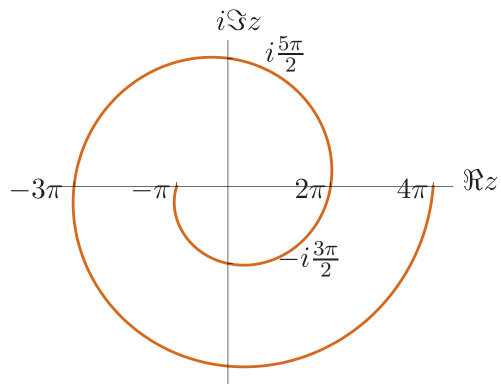
$$f_r = \frac{1}{r}, \quad f_\theta = i\cos\theta, \quad -\frac{i}{r}f_\theta = \frac{\cos\theta}{r}.$$

A função f é $\mathbb{R}$-diferenciável no seu domínio porque f_r e f_θ são contínuas. A função é diferenciável no eixo real positivo porque nesse conjunto é também satisfeita a equação de Cauchy-Riemann $f_r = -\frac{i}{r}f_\theta$. A derivada é

$$f'(r) = e^{-i0}f_r(re^{i0}) = \frac{1}{r} \quad \text{para } r > 0.$$

4.

a)



$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \int_\pi^{4\pi} \frac{e^{i\theta} + i\theta e^{i\theta}}{\theta e^{i\theta}}\,d\theta = \int_\pi^{4\pi}\left(\frac{1}{\theta} + i\right)d\theta = \ln 4 + 3\pi i.$$

b) Aplica-se a Fórmula Integral de Cauchy com $f(z) = \frac{1}{z-3}$, $a = 1$, $n = 2$ e $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re z < 3\}$:

$$\int_{|z-1|=1} \frac{1/(z-3)}{(z-1)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2}\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{z-3}\bigg|_{z=1} = -\frac{\pi i}{4}.$$

c) Para expandir $\frac{1}{z-3}$ em torno de 1, considere-se $w = z - 1$. Então

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{w-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{w}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}$$

para $|w| < 2 \Leftrightarrow |z-1| < 2$. Isto implica

$$\frac{1}{(z-1)^3(z-3)} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{n-3}}{2^{n+1}}$$

para $0 < |z-1| < 2$. A singularidade $z = 1$ é um pólo de terceira ordem. 0 resíduo da função no ponto 1 é $-\frac{1}{8}$.

d) Seja $g(z) = z - \sin(\sin z)$. Tem-se $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$ e $g'''(0) = 2$. $[g'''(z) = \cos(\sin z)\cos^3 z - 3\sin(\sin z)\cos z \sin z + \cos(\sin z)\cos z.]$ Logo,

$$\frac{z - \sin(\sin z)}{z^4} = \frac{g'''(0)}{3!z} + \frac{g^{(iv)}(0)}{4!} + \frac{g^{(v)}(0)}{5!}z + \ldots$$

para todo o $z \neq 0$. A função tem um pólo simples em $z = 0$ e $\mathrm{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{3}$.

5.

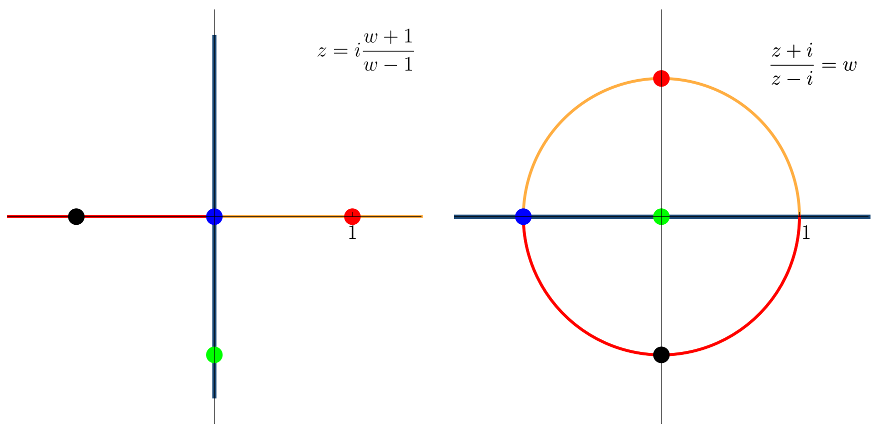
a) A função está definida em $\mathbb{C}\backslash\{-1,1\}$. É diferenciável quando $z := i\,\frac{w+1}{w-1}$ não pertencer ao eixo real negativo. A expressão para w em termos de z é

$$w = \frac{z+i}{z-i}. \tag{1}$$

z pertence ao eixo real negativo sse w pertence à imagem do eixo real negativo por $z \mapsto \frac{z+i}{z-i}$. A aplicação (1) transforma 0 em -1 e ∞ em 1. Transforma o eixo real numa circunferência (porque o eixo real não passa em i) que passa por -1 e 1. Como a aplicação (1) transforma o eixo imaginário no eixo real, a aplicação (1) transforma o eixo real numa circunferência simétrica em relação ao eixo real. A circunferência tem raio 1 e está centrada na origem. A imagem do eixo real negativo por (1) é $\mathcal{N} := \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1 \text{ e } \Im w < 0\}$ porque a imagem de -1 por (1) é $-i$. A função

$$w \mapsto \log\left(i\,\frac{w+1}{w-1}\right), \tag{2}$$

é diferenciável em $\mathbb{C} \setminus (\{-1,1\} \cup \mathcal{N})$ porque é a composta de funções diferenciáveis.



b) A função (2) não é contínua em $\mathcal{N}$ pelo que não é diferenciável em $\mathcal{N}$. Com efeito, quando w cruza $\mathcal{N}$ sobre uma recta que passa na origem (i.e. uma recta que cruza $\mathcal{N}$ e passa em $w = 0$ e $w = \infty$), z cruza o eixo real negativo sobre um arco de circunferência que passa por $-i$ e i (e que consequentemente tem o centro no eixo real), e a parte imaginária do logaritmo de z 'salta' entre $-\pi$ e π.