[versão 1]

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Teste - 2 de Novembro de 2019

MEAer, MEAmbi, MEEC, MEQ

Resolução

1.

a) Uma vez que f é de classe C^2 e

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 2 + 2\alpha,$$

f é harmónica sse $\alpha = -1$. Assim, f é harmónica sse $(\alpha, \beta) = (-1, \beta)$.

b) Para que f seja holomorfa tem que ser harmónica. Logo, $\alpha = -1$ e

$$f(x+iy) = (x^2 - y^2 - y) + i(\beta xy + x).$$

Tem-se

$$\begin{aligned} f_x &= 2x + i(\beta y + 1), \\ f_y &= (-2y - 1) + i\beta x, \\ -if_y &= \beta x + i(2y+1). \end{aligned}$$

Assim, f é $\mathbb{R}$-diferenciável em $\mathbb{C}$ porque tem derivadas parciais contínuas. É diferenciável para $\beta = 2$ porque é nesse caso que é satisfeita a equação de Cauchy-Riemann. Resposta: $(\alpha, \beta) = (-1, 2)$. $f' = f_x = 2x + i(2y+1) = 2z + i$.

c) Usando a fórmula integral de Cauchy, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2} \frac{[f'(z)]^2}{(z-1)^2}\, dz &= 2\pi i \left([f'(z)]^2\right)'\Big|_{z=1} = 4\pi i f'(1) f''(1) \\ &= 4\pi i \cdot (2+i) \cdot 2 = -8\pi + 16\pi i. \end{aligned}$$

2.

a) Parametrize-se a circunferência usando $z(\theta) = e^{i\theta}$ com $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[$. Tem-se

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} \log z\, dz &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} (i\theta) i e^{i\theta}\, d\theta \\ &= i\theta e^{i\theta}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} i e^{i\theta}\, d\theta = -2\pi. \end{aligned}$$

b) Não existe nenhuma função holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ cuja derivada seja o logaritmo do enunciado porque ele é descontínuo e a derivada de uma função holomorfa é holomorfa. O maior subconjunto aberto de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ onde o logaritmo do enunciado é primitivável é $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ com o eixo imaginário positivo removido. De facto, como este é um conjunto simplesmente conexo onde o logaritmo é holomorfo, pelo Teorema de Cauchy, o integral da função sobre qualquer curva fechada contida no conjunto vale zero. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, a função é primitivável.

3.

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{8+z^3} &= \frac{1}{8z^3}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{z}{2})^3} = \frac{1}{8z^3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{3n}}{2^{3n}}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{3(n-1)}}{2^{3(n+1)}} = \sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{3n}}{2^{3(n+2)}},\end{aligned}$$

válido para $0<|z|<2$. O ponto zero é um pólo de terceira ordem da função.

4.

a)

$$\sin\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!z^{2(2n+1)}}.$$

Uma vez que $\frac{\sin z}{z}$ tem uma singularidade removível em 0, a função tem uma singularidade essencial em zero. $z \mapsto \sin\frac{1}{z^2}$ é holomorfa em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Seja g a função inteira definida por $g(z) = \frac{\sin z}{z}$ para $z \neq 0$, $g(0)=1$.

$$\frac{\sin z}{(z-\pi)^2 z} = \frac{1}{(z-\pi)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(\pi)}{n!}(z-\pi)^n,$$

para todo o $z \neq \pi$. Tem-se $g(\pi)=0$ e $g'(\pi) = \frac{z\cos z - \sin z}{z^2}\Big|_{z=\pi} = -\frac{1}{\pi}$. A função tem um pólo de primeira ordem em π.

b) Da alínea anterior, $\mathrm{Res}_{z=\pi} f(z) = -\frac{1}{\pi}$. Logo, o integral pedido vale $-2i$.

5. Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{-3i, 3i\} \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+3^2)^2} = \frac{z^2}{(z+3i)^2(z-3i)^2}$. Tem-se,

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-3i)^2}, \text{ com } g(z) = \frac{z^2}{(z+3i)^2}.$$

A função g é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{-3i\}$. Seja $R > 3$ e $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \Im z = 0 \wedge |z| \leq R\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0 \wedge |z| = R\}$. Pela Fórmula Integral de Cauchy,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_\gamma \frac{g(z)}{(z-3i)^2}\,dz = 2\pi i g'(3i) = 2\pi i \left[\frac{6iz(z+3i)}{(z+3i)^4}\right]_{z=3i} \\
&= 2\pi i \cdot \frac{2^2 3^3 i^3}{2^4 3^4} = \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\pi}{6} = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{|z|=R \wedge \Im z > 0} f(z)\,dz. \quad (*)$$

O cálculo seguinte mostra que o integral ao longo da semi-circunferência tende para zero quando $R \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{|z|=R \wedge \Im z>0} f(z)\,dz\right| &\leq \int_{|z|=R \wedge \Im z>0} \frac{R^2}{(R^2-3^2)^2}|dz| \\
&= \frac{\pi R^3}{(R^2-3^2)^2} \to 0 \text{ quando } R \to +\infty.
\end{aligned}$$

Tomando o limite em ambos os membros de $(*)$ quando $R \to +\infty$, conclui-se que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+3^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{6}$.

6. Por hipótese, tem-se

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,$$

Para

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^p}$$

ter um pólo de ordem 2 em a, deve tomar-se $p = k+2$. Então,

$$f(z) = \tfrac{f^{(k)}(a)}{k!(z-a)^2} + \tfrac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!(z-a)} + \tfrac{f^{(k+2)}(a)}{(k+2)!} + \tfrac{f^{(k+3)}(a)(z-a)}{(k+3)!} + \ldots,$$

para z numa vizinhança de a com o ponto a removido, e o resíduo de g em a é $\frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}$.