Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Teste - 4 de Novembro de 2017

MEC

Resolução

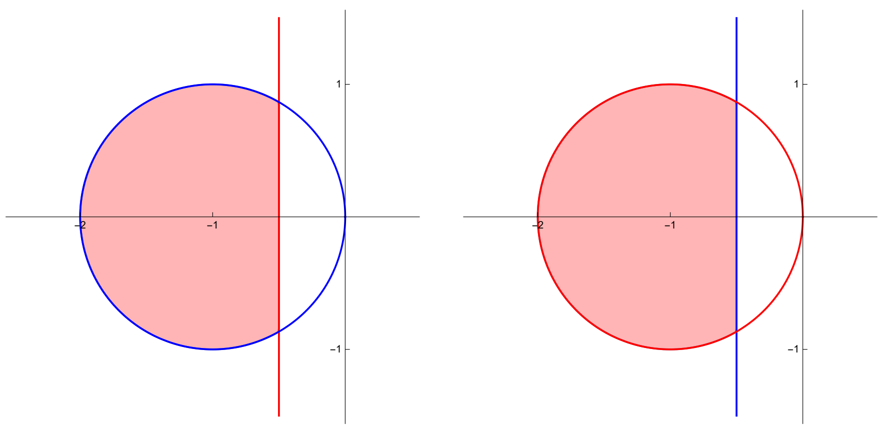
1. $\log\left(\frac{e}{2} + i\frac{\sqrt{3}e}{2}\right) = \log(ee^{i\frac{\pi}{3}}) = 1 + i\frac{\pi}{3}$.

2. $e^{z^2} = e^{x^2-y^2}\cos(2xy) + ie^{x^2-y^2}\sin(2xy)$. O módulo é $e^{x^2-y^2}$ e o argumento é $2xy$. Para todo o z,

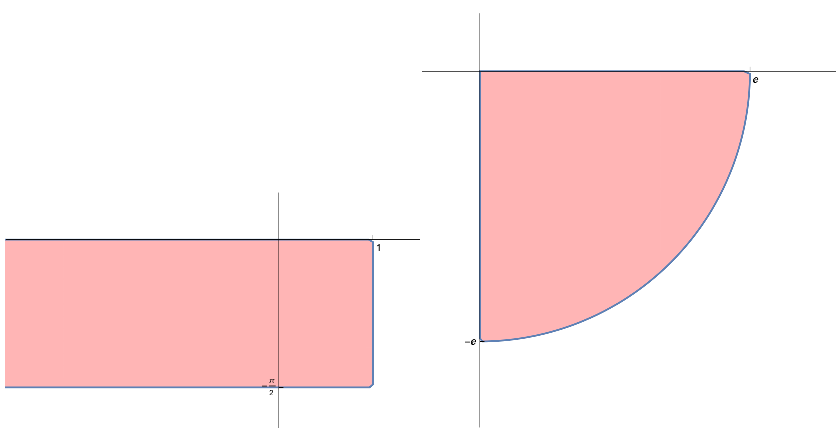
$$e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!},$$

3.

a)



b)



4.

$$\begin{aligned}\int_{1+i}^{3+5i} \overline{z}\, dz &= \int_0^1 \overline{[(1+i)+t(2+4i)]}(2+4i)\, dt \\ &= (2+4i)\int_0^1 [(1-i)+t(2-4i)]\, dt \\ &= (2+4i)[(1-i)+(1-2i)] = (2+4i)(2-3i) \\ &= 16+2i.\end{aligned}$$

5. Tem-se que

$$f_x = -ie^{-ix}y^2, \qquad -if_y = -ie^{-ix}2y.$$

Como estas derivadas parciais são contínuas, a função é $\mathbb{R}$-diferenciável. Logo, a função é diferenciável nos pontos em que satisfaz a equação de Cauchy-Riemann, $f_x = -if_y$. Isto acontece quando $y^2 = 2y$, ou seja, $y = 0$ ou $y = 2$. A derivada de f é

$$f'(x+i0) = f_x(x+i0) = 0, \qquad f'(x+2i) = f_x(x+2i) = -4ie^{-ix}.$$

6.

a) Vamos usar

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz,$$

válida para f holomorfa em Ω, com Ω simplesmente conexo, $a \in \Omega$, e γ curva fechada contida em Ω, não passando por a, e dando uma volta em torno do ponto a no sentido directo.
Escolhemos $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$, $a = 2$, $f(z) = \frac{1}{z^2}$ e $n = 2$. Obtém-se

$$\begin{aligned}\int_{|z-3|=2} g(z)\, dz &= \int_{|z-3|=2} \frac{1/z^2}{(z-2)^3}\, dz \\ &= \frac{2\pi i}{2}\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{z^2}\bigg|_{z=2} = \pi i\frac{6}{z^4}\bigg|_{z=2} = \frac{3\pi i}{8}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}g(z) &= \frac{1}{(z-2)^3}\left[f(2)+f'(2)(z-2)+\frac{f''(2)}{2!}(z-2)^2+\dots\right] \\ &= \frac{f(2)}{(z-2)^3}+\frac{f'(2)}{(z-2)^2}+\frac{f''(2)}{2!(z-2)}+\frac{f'''(2)}{3!}+\dots,\end{aligned}$$

válido para $0 < |z-2| < 2$. Como $f(2)$ não se anula, g tem um pólo de terceira ordem em 2. O resíduo de g em 2 é $\frac{f''(2)}{2!} = \frac{3}{16}$.

7.

a)

$$\begin{aligned} e^z = e^{\frac{1}{z}} \quad &\Leftrightarrow \quad e^{z-\frac{1}{z}} = 1 \ \Leftrightarrow \ z - \frac{1}{z} = 2k\pi i \\ &\Leftrightarrow \quad z^2 - 2k\pi i z - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad z = k\pi i \pm \sqrt{-k^2\pi^2 + 1}, \ k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad z = i\left(k\pi \pm \sqrt{k^2\pi^2 - 1}\right), \ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ ou } z = \pm 1. \end{aligned}$$

b) As soluções de parte imaginária positiva são

$$z = i\left(k\pi + \sqrt{k^2\pi^2 - 1}\right) \quad \text{e} \quad z = i\left(k\pi - \sqrt{k^2\pi^2 - 1}\right), \ k \in \mathbb{N}.$$

As segundas podem também ser escritas como

$$z = \frac{i}{k\pi + \sqrt{k^2\pi^2 - 1}},$$

e tendem para 0 quando $k \to +\infty$. Portanto, não existem soluções com parte imaginária positiva de menor módulo.