

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Teste - 5 de Novembro de 2016

LEMat e MEAer

Resolução

1.

a) $(1+i)^7 = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^7 = 8\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} = 8(1-i)$;

b) $2 + i\pi$;

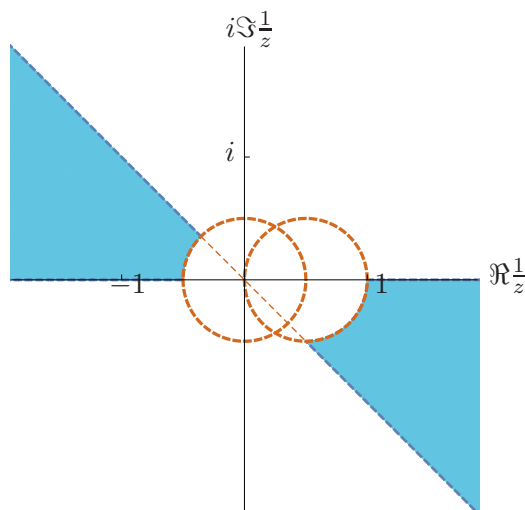
c) $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \sqrt{e^{i\frac{\pi}{3}}} = \pm e^{i\frac{\pi}{6}} = \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$;

d) se $\Re z = 1$, então $z = 1 + iy$ e

$$|e^{\frac{-i}{z}}| = |e^{\frac{-y-i}{1+y^2}}| = e^{-\frac{y}{y^2+1}}$$

o máximo é atingido para $y = -1$, o que corresponde a $z = 1 - i$.

2.



3.

$$f(re^{i\theta}) = \ln r - i \cos \theta.$$

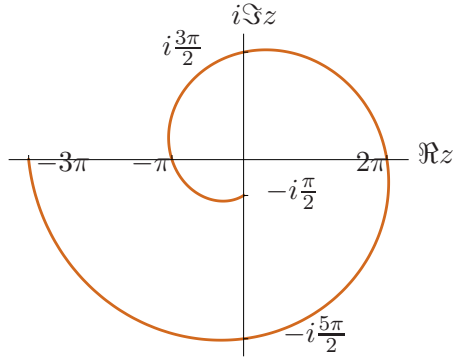
$$f_r = \frac{1}{r}, \quad f_\theta = i \sin \theta, \quad -\frac{i}{r} f_\theta = \frac{\sin \theta}{r}.$$

A função f é \mathbb{R} -diferenciável no seu domínio porque f_r e f_θ são contínuas. A função é diferenciável no eixo imaginário positivo porque nesse conjunto é também satisfeita a equação de Cauchy-Riemann $f_r = -\frac{i}{r} f_\theta$. A derivada é

$$f'(ir) = e^{-i\frac{\pi}{2}} f_r(re^{i\frac{\pi}{2}}) = -\frac{i}{r} \quad \text{para } r > 0.$$

4.

a)



$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi} \frac{e^{-i\theta} - i\theta e^{-i\theta}}{\theta e^{-i\theta}} d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi} \left(\frac{1}{\theta} - i \right) d\theta = \ln 6 - i \frac{5\pi}{2}.$$

b) Aplica-se a Fórmula Integral de Cauchy com $f(z) = \frac{1}{z-1}$, $a = 3$, $n = 2$ e $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 1\}$:

$$\int_{|z-3|=1} \frac{1/(z-1)}{(z-3)^3} dz = \frac{2\pi i}{2} \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{z-1} \Big|_{z=3} = \frac{\pi i}{4}.$$

c) Para expandir $\frac{1}{z-1}$ em torno de 3, considere-se $w = z - 3$. Então

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{w+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{w}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-3)^n}{2^{n+1}}$$

para $|w| < 2 \Leftrightarrow |z-3| < 2$. Isto implica

$$\frac{1}{(z-1)(z-3)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-3)^{n-3}}{2^{n+1}}$$

para $0 < |z-3| < 2$. A singularidade $z = 3$ é um pólo de terceira ordem. O resíduo da função no ponto 3 é $(-1)^2 \frac{1}{2^{2+1}} = \frac{1}{8}$.

d) Seja $g(z) = e^z - e^{\sin z}$. Tem-se $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$ e $g'''(0) = 1$. [$g'''(z) = e^z - e^{\sin z} \cos^3 z + 3e^{\sin z} \cos z \sin z + e^{\sin z} \cos z$.] Logo,

$$\frac{e^z - e^{\sin z}}{z^4} = \frac{g'''(0)}{3!z} + \frac{g^{(iv)}(0)}{4!} + \frac{g^{(v)}(0)}{5!}z + \dots$$

para todo o $z \neq 0$. A função tem um pólo simples em $z = 0$ e $\text{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

5.

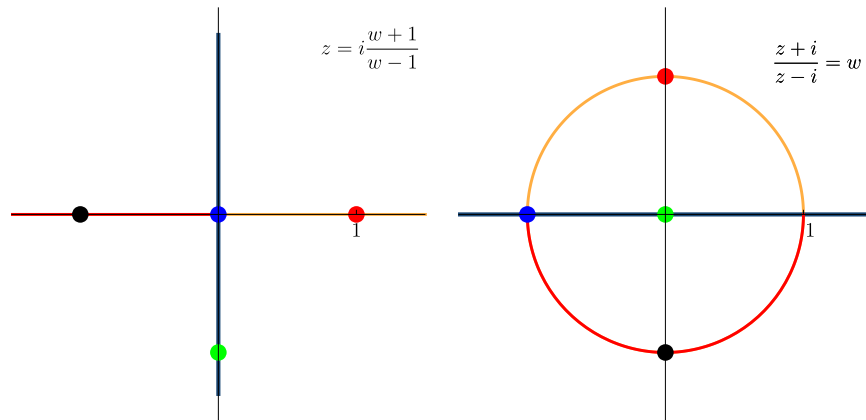
- a) A função está definida em $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. É diferenciável quando $z := i \frac{w+1}{w-1}$ não pertencer ao eixo real negativo. A expressão para w em termos de z é

$$w = \frac{z+i}{z-i}. \quad (1)$$

z pertence ao eixo real negativo sse w pertence à imagem do eixo real negativo por $z \mapsto \frac{z+i}{z-i}$. A aplicação (1) transforma 0 em -1 e ∞ em 1. Transforma o eixo real numa circunferência (porque o eixo real não passa em i) que passa por -1 e 1. Como a aplicação (1) transforma o eixo imaginário no eixo real, a aplicação (1) transforma o eixo real numa circunferência simétrica em relação ao eixo real. A circunferência tem raio 1 e está centrada na origem. A imagem do eixo real negativo por (1) é $\mathcal{N} := \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1 \text{ e } \Im w < 0\}$ porque a imagem de -1 por (1) é $-i$. A função

$$w \mapsto \log \left(i \frac{w+1}{w-1} \right), \quad (2)$$

é diferenciável em $\mathbb{C} \setminus (\{-1, 1\} \cup \mathcal{N})$ porque é a composta de funções diferenciáveis.



- b) A função (2) não é contínua em \mathcal{N} pelo que não é diferenciável em \mathcal{N} . Com efeito, quando w cruza \mathcal{N} sobre uma recta que passa na origem (i.e. uma recta que cruza \mathcal{N} e passa em $w = 0$ e $w = \infty$), z cruza o eixo real negativo sobre um arco de circunferência que passa por $-i$ e i (e que consequentemente tem o centro no eixo real), e a parte imaginária do logaritmo de z ‘salta’ entre $-\pi$ e π .