Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Teste - 31 de Outubro de 2015

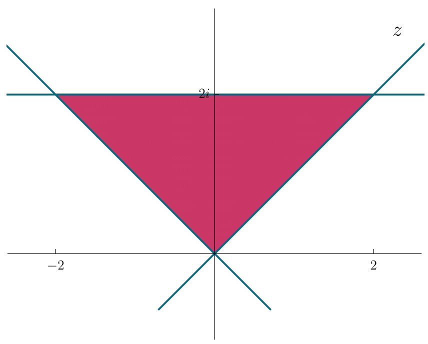
LEGM e MEC

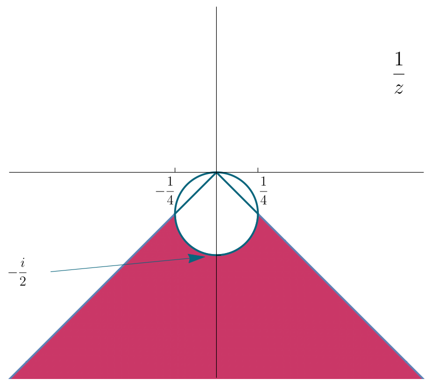
Resolução

1.

a) $|e^z| = e^x$, $\arg e^z = y$.
$e^z = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$.
$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, para todo o $z \in \mathbb{C}$.

b)





c) $\int_1^{\frac{e}{\sqrt{2}}(1+i)} \frac{1}{z}\, dz = \log z\Big|_1^{ee^{i\frac{\pi}{4}}} = \log(ee^{i\frac{\pi}{4}}) - \log 1 = 1 + i\frac{\pi}{4}$.

d) $\int_{\gamma_1} \frac{1}{z-a_1}\, dz = (-1) \times 2\pi i = -2\pi i$, $\int_{\gamma_2} \frac{1}{z-a_2}\, dz = 2 \times 2\pi i = 4\pi i$.

e) $\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 - \ldots$, para $|z| < 1$.

f) $f_x = 2x + 2iy$ e $f_y = 2ix$. A função é $\mathbb{R}$-diferenciável porque f_x e f_y são contínuas. $f_x = -if_y \Leftrightarrow 2x + 2iy = 2x \Leftrightarrow y = 0$. A função é diferenciável sobre o eixo real. A derivada é $f'(x+i0) = f_x(x+i0) = 2x$.

g)

$$
\begin{aligned}
\int_{|z|=2} \frac{1}{z(z-1)^2(z-3)}\, dz &= \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{(z-1)^2(z-3)}}{z}\, dz + \int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{z(z-3)}}{(z-1)^2}\, dz \\
&= 2\pi i \left(\frac{1}{(z-1)^2(z-3)}\Bigg|_0 + \frac{d}{dz}\frac{1}{z(z-3)}\Bigg|_1 \right) \\
&= 2\pi i \left(-\frac{1}{3} - \frac{2z-3}{z^2(z-3)^2}\Bigg|_1 \right) \\
&= 2\pi i \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{\pi i}{6}.
\end{aligned}
$$

No primeiro integral, $a = 0$, $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re z < 1\}$, $n = 0$. No segundo integral, $a = 1$, $f(z) = \frac{1}{z(z-3)}$, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re z < 3\}$, $n = 1$.

h) $\frac{1}{z(z-1)^2(z-3)} = \frac{1}{(z-1)^2} g(z)$, com $g(z) = \frac{1}{z(z-3)}$.
$g(z) = g(1) + g'(1)(z-1) + \frac{g''(1)}{2}(z-1)^2 + \ldots$, para $|z-1| < 1$.
$\frac{1}{z(z-1)^2(z-3)} = \frac{g(1)}{(z-1)^2} + \frac{g'(1)}{z-1} + \frac{g''(1)}{2} + \ldots$, para $0 < |z-1| < 1$.
$g(1) = -\frac{1}{2}$ e $g'(1) = \frac{1}{4}$.
Como $g(1) \neq 0$, a função tem um pólo de 2ª ordem em 1.
$\mathrm{Res}_{z=1} \frac{1}{z(z-1)^2(z-3)} = g'(1) = \frac{1}{4}$.

2.

a) $e^{e^z} = e^{e^x \cos y} e^{ie^x \sin y} = e^{e^x \cos y} \cos(e^x \sin y) + ie^{e^x \cos y} \sin(e^x \sin y)$.

b) $f_r = 2r + i \sin\theta$ e $f_\theta = ir\cos\theta$. Como f_r e f_θ são contínuas, f é $\mathbb{R}$-diferenciável em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. $-\frac{i}{r} f_\theta = \cos\theta$. $f_r = -\frac{i}{r} f_\theta \Leftrightarrow (2r + i\sin\theta = \cos\theta) \Leftrightarrow (2r = \cos\theta \wedge \sin\theta = 0) \Leftrightarrow (r = \frac{1}{2} \wedge \theta = 2k\pi)$. f é diferenciável no ponto $z = \frac{1}{2}$. $f'(\frac{1}{2}) = e^{-i0} f_r(\frac{1}{2} e^{i0}) = 1$.

c) $\frac{1}{1-z^2} = -\frac{1}{z^2} \frac{1}{1-(1/z^2)} = -\frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \ldots\right) = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^6} - \ldots$, para $|z| > 1$.

d) A função está bem definida porque o valor do integral não depende da curva que une 0 a z. Esta afirmação é consequência do Teorema de Cauchy porque a função integranda é inteira e $\mathbb{C}$ é simplesmente conexo.