

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Teste - 2 de Novembro de 2013

LEGM e MEC

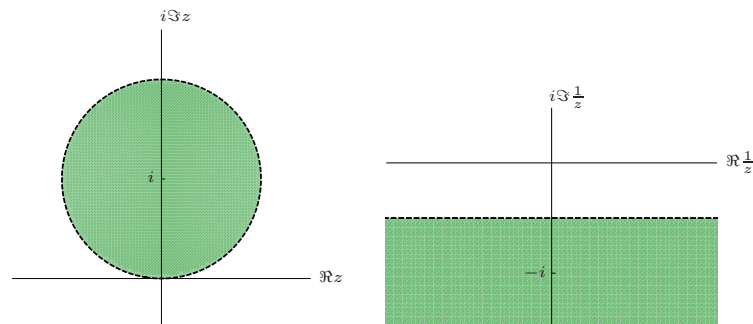
Resolução

1.

- a) $2i$;
- b) 5 ;
- c) $-i$;
- d) $3, 3e^{i\frac{2\pi}{3}}, 3e^{-i\frac{2\pi}{3}}$;
- e) $1 + i\frac{\pi}{2}$;
- f) 1 .

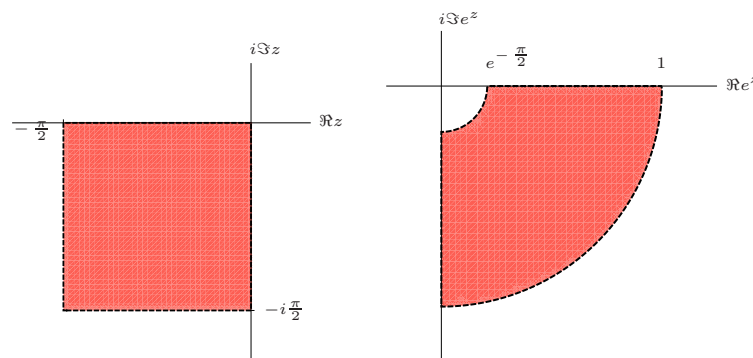
2.

a)



$$f(S) = \{z \in \mathbb{C} : \Im z < -\frac{1}{2}\}.$$

b)



$$f(S) = \{z \in \mathbb{C} : e^{-\frac{\pi}{2}} < |z| < 1 \text{ e } -\frac{\pi}{2} < \arg z < 0\}.$$

3.

$$f_x = 1 - i\frac{y}{x^2}, \quad f_y = 1 + i\frac{1}{x}, \quad -if_y = \frac{1}{x} - i.$$

A função é \mathbb{R} -diferenciável no seu domínio porque f_x e f_y são contínuas. A equação de Cauchy-Riemann, $f_x = -if_y$, é satisfeita em $1 + i$.

$$f'(1 + i) = f_x(1 + i) = 1 - i.$$

4.

a) $\int_L \bar{z} dz = \int_0^1 (1 - t - it)(-1 + i) dt = -\frac{1}{2}(1 - i)^2 = i;$

b) $\int_L z^3 \log z dz = \left(\frac{z^4}{4} \log z - \frac{z^4}{16} \right) \Big|_1^i = i\frac{\pi}{8}.$

5.

a)

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2} \frac{1}{(z-1)^2(z-3)^2} dz &= 2\pi i \frac{d}{dz} \frac{1}{(z-3)^2} \Big|_{z=1} \\ &= -2\pi i \frac{2}{(z-3)^3} \Big|_{z=1} = i\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

b) Seja $g(z) = \frac{1}{(z-3)^2}$. Tem-se

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-1)^2} g(z) \\ &= \frac{1}{(z-1)^2} \left[g(1) + g'(1)(z-1) + \frac{g''(1)}{2!}(z-1)^2 + \frac{g'''(1)}{3!}(z-1)^3 + \dots \right] \\ &= \frac{g(1)}{(z-1)^2} + \frac{g'(1)}{z-1} + \frac{g''(1)}{2!} + \frac{g'''(1)}{3!}(z-1) + \dots, \end{aligned}$$

válido para $0 < |z-1| < 2$. Como $g(1) \neq 0$, f tem um pólo de segunda ordem no ponto 1. O resíduo de f no ponto 1 é $g'(1) = \frac{1}{4}$.

6. Seja $z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$\begin{aligned} \log e^z &= \log(e^x e^{iy}) \\ &= x + i(y - 2k\pi), \text{ onde } k \text{ é o inteiro tal que } y - 2k\pi \in]-\pi, \pi] \\ &= z - 2k\pi i, \text{ onde } k \text{ é o inteiro tal que } \Im z \in](2k-1)\pi, (2k+1)\pi]. \end{aligned}$$

Nos pontos z cuja parte imaginária é $(2l+1)\pi$, para algum $l \in \mathbb{Z}$, a função $z \mapsto \log e^z$ é descontínua. Com efeito, seja z_0 com $\Im z_0 = (2l+1)\pi$. Então,

$$\log e^{z_0} = z_0 - 2l\pi i.$$

Para pontos z cuja parte imaginária é ligeiramente superior a $(2l + 1)\pi$, $\Im z \in](2(l + 1) - 1)\pi, (2(l + 1) + 1)\pi]$. Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ \Im z > \Im z_0}} \log e^z &= \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ \Im z > \Im z_0}} [z - 2(l + 1)\pi i] \\ &= z_0 - 2(l + 1)\pi i \neq \log e^{z_0}. \end{aligned}$$

Nos restantes pontos de \mathbb{C} a função é contínua. Com efeito, seja z_0 com $(2l - 1)\pi < \Im z_0 < (2l + 1)\pi$, para um certo $l \in \mathbb{Z}$. Para z próximo de z_0 , tem-se

$$\log e^z = z - 2l\pi i.$$

Assim,

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \log e^z = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} (z - 2l\pi i) = z_0 - 2l\pi i = \log e^{z_0}.$$

Considere-se agora $z = re^{i\theta}$, com $r > 0$ e $\theta \in]-\pi, \pi]$. Tem-se

$$e^{\log z} = e^{\log(re^{i\theta})} = e^{\ln r + i\theta} = re^{i\theta} = z.$$

A função $z \mapsto e^{\log z}$ é contínua no seu domínio ($\mathbb{C} \setminus \{0\}$) porque é a função identidade.