Análise Complexa e Equações Diferenciais

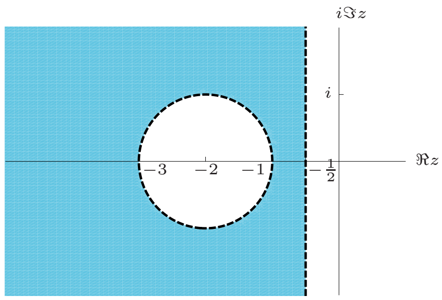
1º Teste - 6 de Abril de 2013

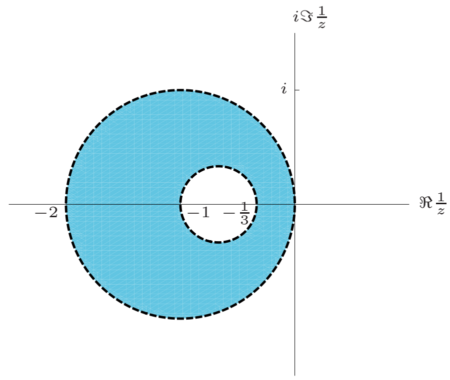
MEEC

Resolução

1. As raízes cúbicas de -8 são $2e^{\frac{i\pi}{3}}$, $2e^{-\frac{i\pi}{3}}$ e -2.

2. A imagem da região $\left\{z \in \mathbb{C} : |z+2| > 1 \text{ e } \Re z < -\frac{1}{2}\right\}$ por $z \mapsto \frac{1}{z}$ é $\left\{z \in \mathbb{C} : |z+1| < 1 \text{ e } \left|z + \frac{2}{3}\right| > \frac{1}{3}\right\}$.





3. $f_x(x+iy) = 2xe^{x^2+iy}$ e $f_y(x+iy) = ie^{x^2+iy}$. Uma vez que estas derivadas parciais são contínuas, f é $\mathbb{R}$-diferenciável. Como $-if_y(x+iy) = e^{x^2+iy}$, a equação de Cauchy-Riemann, $f_x = -if_y$, é satisfeita quando $x = \frac{1}{2}$. A função é diferenciável nos pontos cuja parte real é igual a $\frac{1}{2}$. A derivada de f é $f'\left(\frac{1}{2}+iy\right) = f_x\left(\frac{1}{2}+iy\right) = e^{\frac{1}{4}+iy}$.

4.

a) $z(t) = 1 + t(-1-i)$ com $t \in [0,1]$.

$$\int_\gamma \overline{z}\, dz = \int_0^1 [(1 + t(-1+i)](-1-i)\, dt = -1 - i + 1 = -i.$$

b) $\int_1^{\frac{i\pi}{2}} e^{2z}\, dz = \frac{1}{2}e^{i\pi} - \frac{1}{2}e^2 = -\frac{1}{2}(1+e^2)$.

c) $\int_{|z|=2} \frac{1}{(z-1)(z+3)^2}\, dz = 2\pi i \left.\frac{1}{(z+3)^2}\right|_{z=1} = \frac{\pi i}{8}$.

d)

$$z^2 e^{\frac{2}{z}} = z^2\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{1}{2!}\frac{2^2}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{2^3}{z^3} + \dots\right) = z^2 + 2z + \frac{1}{2!}2^2 + \frac{1}{3!}\frac{2^3}{z} + \dots.$$

Zero é uma singularidade essencial da função e o resíduo da função em zero é $\frac{2^3}{3!} = \frac{4}{3}$.

e)

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z^2+1)^2} &= \frac{1}{(z-i)^2}g(z) \quad \text{com } g(z)=\frac{1}{(z+i)^2}\\ &= \frac{1}{(z-i)^2}\left[g(i)+g'(i)(z-i)+\frac{g''(i)}{2!}(z-i)^2+\ldots\right]\\ &= \frac{g(i)}{(z-i)^2}+\frac{g'(i)}{z-i}+\frac{g''(i)}{2!}+\ldots, \text{ para } 0<|z-i|<2.\end{aligned}$$

$$g(i)=-\frac{1}{4}, \qquad g'(z)=-\frac{2}{(z+i)^3}, \qquad g'(i)=\frac{1}{4i}.$$

A função tem um pólo de segunda ordem em i. O resíduo da função em i é igual a $\frac{1}{4i}$.

f) $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+9}\,dx = \frac{\pi}{3}$.

5. O conjunto Ω esboçado é simplesmente conexo e a função f é holomorfa em Ω. Pelo Teorema de Cauchy, para qualquer curva fechada $\mathcal{C}$ seccionalmente C^1 em Ω, $\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z}\,dz = 0$. Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, f é a derivada de uma função holomorfa $F:\Omega\to\mathbb{C}$. Pode-se escolher F igual a

$$F(z)=\int_1^z \frac{1}{w}\,dw,$$

onde a curva que liga 1 a z está contida em Ω. Esta função F é igual a

$$F(z)=\begin{cases}\log z & \text{para } z\in\Omega_1,\\ \log z - 2\pi i & \text{para } z\in\Omega_2.\end{cases}$$

Aqui o logaritmo é o principal e Ω_1 e Ω_2 estão esboçados na figura seguinte. A intersecção de Ω com o eixo real negativo pertence a Ω_2, $\Omega_1\cup\Omega_2=\Omega$ e $\Omega_1\cap\Omega_2=\emptyset$.