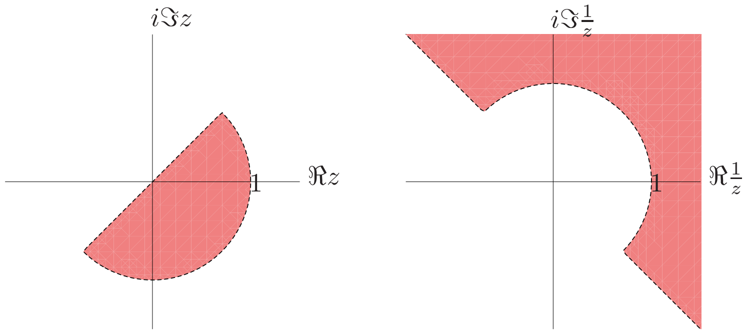
Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Teste - 5 de Novembro de 2011

LMAC, MEBiom e MEFT

Resolução

1. Recordando que $\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{r}$,



2. A função f é descontínua no eixo real negativo. Logo, f não é diferenciável no eixo real negativo. A função f é também descontínua na origem porque, para $-\pi < \theta_0 \leq \pi$,

$$\lim_{r\to 0} f(re^{i\theta_0}) = i\theta_0.$$

Assim, f não é diferenciável na origem. Sejam $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$. As derivadas parciais de f são

$$\begin{aligned} f_r &= 2r, \\ f_\theta &= i. \end{aligned}$$

Como estas derivadas parciais são contínuas, f é $\mathbb{R}$-diferenciável em $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z = x \text{ com } x \leq 0\}$. Averiguemos em que pontos deste conjunto é satisfeita a equação de Cauchy-Riemann. Neste caso, equação $f_r = -\frac{i}{r} f_\theta$ é equivalente a

$$2r = \frac{1}{r} \ \Leftrightarrow \ 2r^2 = 1 \ \Leftrightarrow \ r = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Conclui-se que f é diferenciável na circunferência centrada na origem de raio $\frac{\sqrt{2}}{2}$, com o ponto $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ removido. Nestes pontos a derivada de f é

$$f'\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta}\right) = e^{-i\theta} f_r\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta}\right) = \sqrt{2}e^{-i\theta}, \quad \text{com } \theta \in]-\pi, \pi[\,.$$

3. A curva γ é parametrizada por $z(\theta) = 3 + 2e^{i\theta}$ com $\theta \in [0, \pi]$. Pela definição de integral,

$$\begin{aligned}\int_\gamma \overline{z}\, dz &= \int_0^\pi \overline{z(\theta)} z'(\theta)\, d\theta = \int_0^\pi (3 + 2e^{-i\theta}) 2ie^{i\theta}\, d\theta \\ &= \int_0^\pi (6ie^{i\theta} + 4i)\, d\theta = 6e^{i\pi} - 6 + 4\pi i = -12 + 4\pi i.\end{aligned}$$

4. A função logaritmo principal, $z \mapsto \log z$, é diferenciável em $\mathbb{C}$ excepto no eixo real negativo e excepto em zero e a sua derivada é $z \mapsto \frac{1}{z}$. De acordo com o Teorema Fundamental do Cálculo, vem

$$\begin{aligned}\int_{i\frac{\pi}{2}}^{i\pi} \left(e^z + \frac{1}{z}\right) dz &= (e^z + \log z)\big|_{i\frac{\pi}{2}}^{i\pi} = e^{i\pi} - e^{i\frac{\pi}{2}} + \log(i\pi) - \log\left(i\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -1 - i + \left(\ln \pi + i\frac{\pi}{2}\right) - \left(\ln\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -1 - i + \ln 2.\end{aligned}$$

5.

a) A função f é

$$f(z) = \frac{1}{z+1} g(z) \quad \text{com } g(z) = \frac{e^z}{z-1}.$$

A função g é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ pelo que o seu desenvolvimento em série de Taylor em torno do ponto -1 converge e coincide com g em $|z+1| < 2$. O desenvolvimento em série de Laurent de f em torno de -1 é

$$f(z) = \frac{g(-1)}{z+1} + g'(-1) + \frac{g''(-1)}{2}(z+1) + \frac{g'''(-1)}{3!}(z+1)^2 + \dots,$$

válido para $0 < |z+1| < 2$. Uma vez que

$$g'(z) = \frac{e^z(z-2)}{(z-1)^2},$$

obtém-se $g(-1) = -\frac{e^{-1}}{2}$ e $g'(-1) = -\frac{3e^{-1}}{4}$. Portanto,

$$f(z) = -\frac{e^{-1}}{2}\frac{1}{z+1} - \frac{3e^{-1}}{4} + \dots,$$

válido para $0 < |z+1| < 2$. A função f tem um pólo de primeira ordem no ponto -1.

b) Usando a fórmula integral de Cauchy,

$$\int_{\partial D_R} f(z)\,dz = 2\pi i g(-1) = -i\pi e^{-1}.$$

c) Decompondo a fronteira de D_R, obtém-se

$$-i\pi e^{-1} = \int_{\partial D_R} f(z)\,dz = i\int_{-R}^{R} f(iy)\,dy + \int_{\substack{|z|=R\\ \Re z<0}} f(z)\,dz. \tag{1}$$

Note-se que no eixo imaginário $z = iy$ e $dz = i\,dy$. Majoremos o último integral. Atendendo a $|e^z| = |e^{x+iy}| = e^x \leq 1$ para $x \leq 0$,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\substack{|z|=R\\ \Re z<0}} \frac{e^z}{z^2-1}\,dz\right| &\leq \int_{\substack{|z|=R\\ \Re z<0}} \frac{|e^z|}{|z^2-1|}\,|dz| \leq \int_{\substack{|z|=R\\ \Re z<0}} \frac{1}{||z^2|-1|}\,|dz| \\ &= \frac{1}{|R^2-1|}\int_{\substack{|z|=R\\ \Re z<0}} |dz| = \frac{\pi R}{R^2-1}.\end{aligned}$$

Calculando o limite do primeiro e último membros de (1) quando $R \to \infty$, vem

$$-i\pi e^{-1} = -i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iy}}{y^2+1}\,dy + 0,$$

ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iy}}{y^2+1}\,dy = \pi e^{-1}.$$

6.

a) Seja $0 < r \leq R$. A Propriedade do Valor Médio afirma que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(a + re^{i\theta})\,d\theta.$$

Em consequência,

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(a + re^{i\theta})|\,d\theta.$$

Suponhamos que a é um ponto de máximo de $|f|$. Então, como $|f(a + re^{i\theta})| \leq |f(a)|$,

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(a + re^{i\theta})|\,d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(a)|\,d\theta = |f(a)|.$$

Assim, as duas desigualdades da linha anterior têm que ser igualdades. Na circunferência de raio r centrada em a, o módulo de f tem que coincidir com $|f(a)|$, caso contrário a segunda desigualdade seria estrita e chegar-se-ia à contradição $|f(a)| < |f(a)|$. Conclui-se que $|f|$ é constante em $\overline{B_R(a)}$. Como f é holomorfa, f é constante em $\overline{B_R(a)}$.

b) Suponhamos agora que a é ponto de mínimo de $|f|$ e que $|f(a)| > 0$. Então f não se anula em $\overline{B_R(a)}$ porque, por hipótese, a é ponto de mínimo de $|f|$. Logo, $\frac{1}{f}$ é holomorfa em $\overline{B_R(a)}$ e a é um ponto de máximo de $\left|\frac{1}{f}\right|$. Da alínea anterior, $\frac{1}{f}$ é constante e, portanto, f é constante em $\overline{B_R(a)}$.