Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Teste - 6 de Novembro de 2010

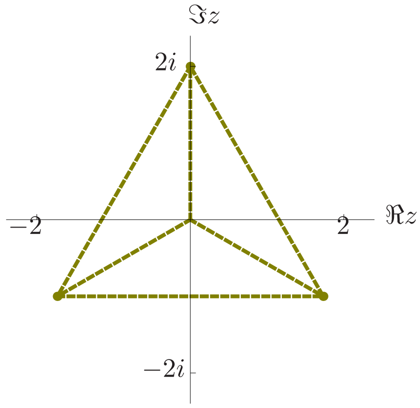
LMAC, MEBiom e MEFT

Resolução

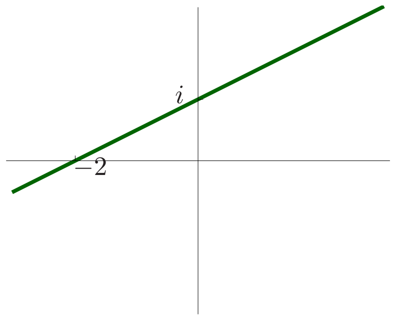
1.

a) O raio de convergência da série é $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{2^{-2n}}} = 4$.

b) As raízes cúbicas de $-8i = 8e^{i\frac{3\pi}{2}}$ são $2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$, $2e^{i\frac{\pi}{2}+i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\sqrt{3} - i$ e $2e^{i\frac{\pi}{2}-i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} - i$.



c) Trata-se da equação de uma recta. A intersecção com o eixo real faz-se quando $z = x$. Logo, $-2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$. A intersecção com o eixo imaginário faz-se quando $z = iy$. Logo, $4y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 1$. A recta une os pontos $z = -2$ e $z = i$.



2.

a) Usando a definição de integral,

$$\begin{aligned} \int_L \overline{z}\, dz &= \int_0^1 \overline{[-2 + t(2+i)]}(2+i)\, dt \\ &= -2(2+i) + \frac{1}{2}5 = -\frac{3}{2} - 2i. \end{aligned}$$

b) Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, $\int_1^{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} \frac{1}{z}\,dz = \log\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \log(e^{i\frac{\pi}{3}}) = i\frac{\pi}{3}$.

c) Pela Fórmula Integral de Cauchy, $\int_{|z|=2} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}z}}{(z-1)(z-3)}\,dz = 2\pi i \left.\frac{e^{i\frac{\pi}{2}z}}{z-3}\right|_{z=1} = \pi$.

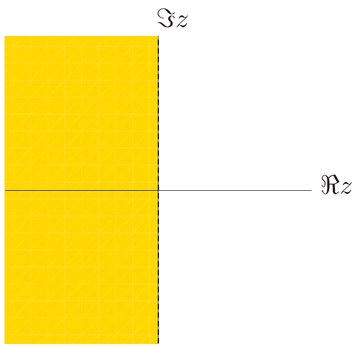
d) O desenvolvimento em série de Laurent em torno de π é

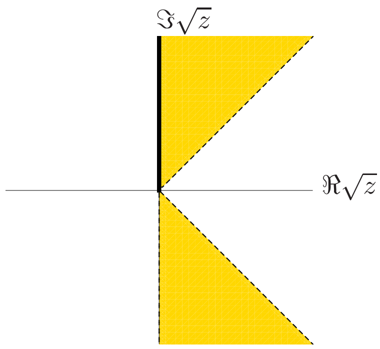
$$\begin{aligned}
\frac{\sin z}{(z-\pi)^3} &= \frac{1}{(z-\pi)^3}\Bigg[\sin\pi + \cos\pi\,(z-\pi) - \frac{\sin\pi}{2!}(z-\pi)^2 \\
&\qquad - \frac{\cos\pi}{3!}(z-\pi)^3 + \frac{\sin\pi}{4!}(z-\pi)^4 + \dots\Bigg] \\
&= \frac{1}{(z-\pi)^3}\left[-(z-\pi) + \frac{1}{3!}(z-\pi)^3 - \frac{1}{5!}(z-\pi)^5 + \dots\right] \\
&= -\frac{1}{(z-\pi)^2} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}(z-\pi)^2 + \dots,
\end{aligned}$$

válido para todo o $z \neq \pi$. A função tem apenas uma singularidade, um pólo de segunda ordem no ponto π.

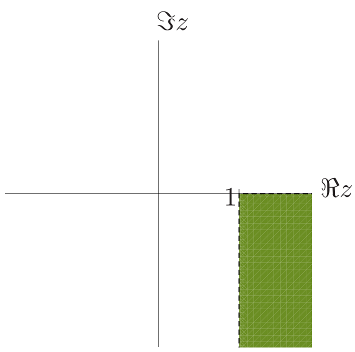
3.

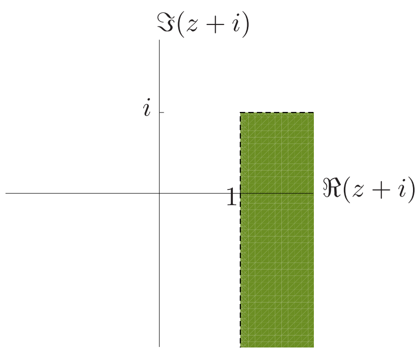
a)

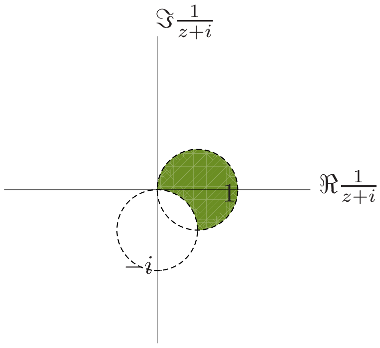




b)







4.

a) Designando por L o comprimento de γ,

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma f_n(z)\, dz - \int_\gamma f(z)\, dz \right| &\leq \int_\gamma |f_n(z) - f(z)|\, |dz| \\ &\leq \sup_{z\in\Omega} |f_n(z) - f(z)| \int_\gamma |dz| \\ &= L \sup_{z\in\Omega} |f_n(z) - f(z)| \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$, uma vez que (f_n) converge uniformemente para f.

b) Pelo teorema de Cauchy, para qualquer curva γ fechada em Ω, $\int_\gamma f_n(z)\, dz = 0$. Pela alínea anterior, $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$. Pelo Teorema de Morera, uma vez que γ é fechada arbitrária, f é holomorfa.

c) Sim, o resultado permanece válido se o domínio não for simplesmente conexo. De facto, seja $a \in \Omega$ e escolha-se r suficientemente pequeno de modo a $B_r(a) \subset \Omega$. Pela alínea anterior, f é holomorfa em $B_r(a)$. Como a é arbitrário, f é holomorfa em Ω.