Análise Complexa e Equações Diferenciais

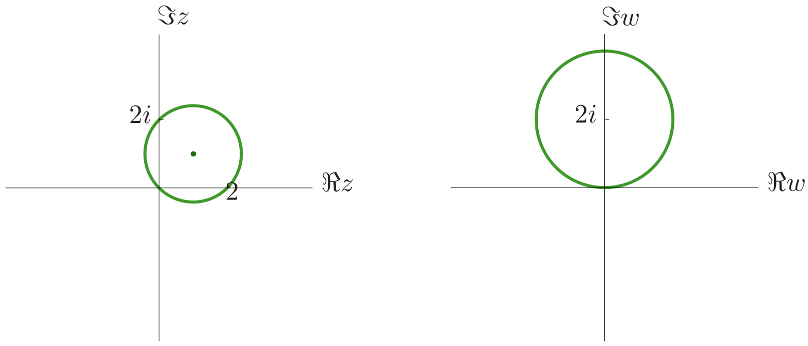
1º Teste - 7 de Novembro de 2009

LMAC, MEBiom, MEFT

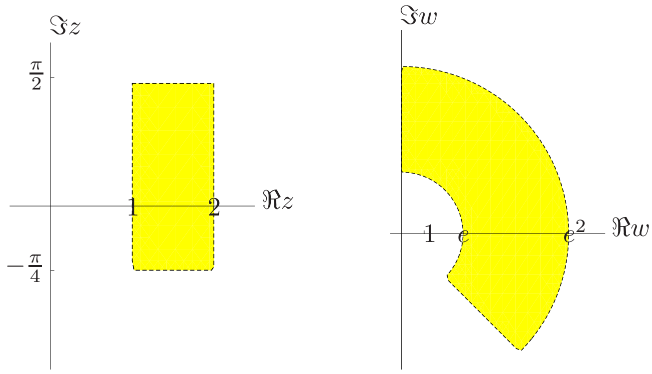
Resolução

1.

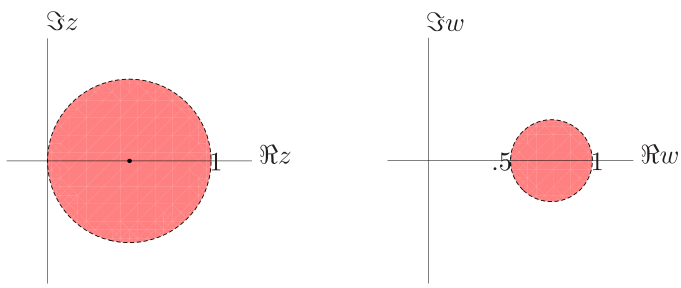
a) $S = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - (1+i)| = \sqrt{2} \right\}$, $w = f(z) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} z$.



b) $S = \left\{ z \in \mathbb{C} : 1 < \Re z < 2,\ -\frac{\pi}{4} < \Im z < \frac{\pi}{2} \right\}$, $w = f(z) = e^x e^{iy}$.



c) $S = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2} \right\}$, $w = f(z) = \frac{1}{z+1}$.



2. Escrevendo $z = x+iy$, $f(x+iy) = \cos(x-iy)$. A função f é $\mathbb{R}$-diferenciável porque tem derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ contínuas. Portanto, será diferenciável nos pontos em que satisfizer a equação de Cauchy-Riemann, $f_x = -if_y$. Ora, $f_x = -\sin(x-iy)$ e $f_y = i\sin(x-iy)$. Logo, $f_x = -if_y \Leftrightarrow -\sin(x-iy) = \sin(x-iy) \Leftrightarrow \sin(x-iy) = 0 \Leftrightarrow x-iy = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. Conclui-se que f é diferenciável em $z = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

3.

a) O segmento é parametrizado por $z(t) = 1 + t(i-1)$ com $t \in [0,1]$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_L \overline{z}\,dz &= \int_0^1 \overline{z(t)}z'(t)\,dt = \int_0^1 (1-t(i+1))(i-1)\,dt \\ &= \big(1 - \tfrac{1}{2}(i+1)\big)(i-1) = i.\end{aligned}$$

b) Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_e^i \frac{1}{z}\,dz = \log i - \log e = i\frac{\pi}{2} - 1,$$

onde log designa o logaritmo principal.

4.

a) Pela Fórmula Integral de Cauchy,

$$\int_{|z+i|=1} \frac{1}{z^2+1}\,dz = \int_{|z+i|=1} \frac{1/(z-i)}{z+i}\,dz = 2\pi i \left.\frac{1}{z-i}\right|_{z=-i} = -\pi.$$

Seja $g(z) = \frac{1}{z-i}$. A série de Laurent em torno de $-i$ é

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{g(-i)}{z+i} + g'(-i) + \frac{g''(-i)}{2!}(z+i) + \dots,$$

para $0 < |z+i| < 2$. Como $g(-i) \neq 0$, o ponto $-i$ é um pólo de primeira ordem da função integranda. De forma semelhante, o ponto i é um pólo de primeira ordem da função integranda.

b) A função $z \mapsto \log(1+z)$ é holomorfa no complementar de $\{z \in \mathbb{C} : \Im z = 0 \text{ e } \Re z \leq -1\}$. De novo pela Fórmula Integral de Cauchy,

$$\begin{aligned}\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\log(1+z)}{z^3}\,dz &= \frac{2\pi i}{2!}\left.\frac{d^2}{dz^2}\log(1+z)\right|_{z=0} \\ &= \pi i \left.\left(-\frac{1}{(1+z)^2}\right)\right|_{z=0} = -\pi i.\end{aligned}$$

Sabemos das aulas que

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots,$$

para $|z| < 1$. De facto, ambos so membros coincidem no ponto zero e têm derivadas iguais. Por isso,

$$\frac{\log(1+z)}{z^3} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2z} + \frac{1}{3} - \frac{z}{4} + \dots,$$

para $0 < |z| < 1$. O ponto 0 é um pólo de segunda ordem da função integranda. A função integranda tem ainda singularidades em $\{z \in \mathbb{C} : \Im z = 0 \text{ e } \Re z \le -1\}$, mas essas singularidades não são isoladas.

5. Usando a fórmula para o coseno da soma,

$$\begin{aligned} w = \cos z = \cos(x+iy) &= \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) \\ &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y. \end{aligned}$$

Fixando $y_0 \in \,]0, +\infty[$,

$$x \mapsto \cos x \cosh y_0 - i \sin x \sinh y_0$$

descreve parametricamente a elipse

$$\left(\frac{\Re w}{\cosh y_0}\right)^2 + \left(\frac{\Im w}{\sinh y_0}\right)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

no sentido dos ponteiros do relógio, e percorrida infinitas vezes. Esta elipse intersecta o eixo real positivo em $\cosh y_0$ e o eixo imaginário positivo em $\sinh y_0$.

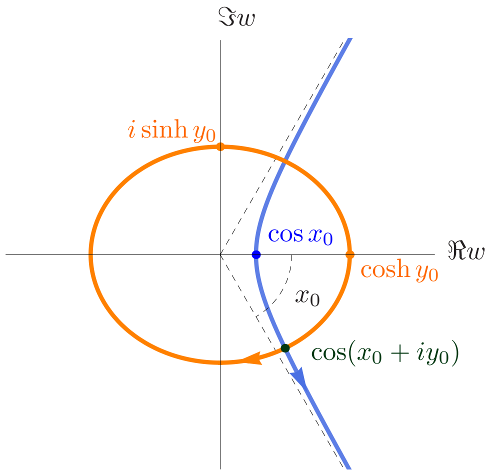
Fixando $x_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$y \mapsto \cos x_0 \cosh y - i \sin x_0 \sinh y$$

descreve parametricamente a hipérbole

$$\left(\frac{\Re w}{\cos x_0}\right)^2 - \left(\frac{\Im w}{\sin x_0}\right)^2 = \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

percorrida de cima para baixo. Esta hipérbole intersecta o eixo real positivo em $\cos x_0$, não intersecta o eixo imaginário, e tem assímptotas $\Im w = \tan x_0 \Re w$ e $\Im w = -\tan x_0 \Re w$, fazendo um ângulo de $\pm x_0$ radianos com o eixo real positivo.



6. Uma vez que

$$|n^z| = |e^{z \log n}| = |e^{x \log n} e^{iy \log n}| = e^{x \log n} = n^x = n^{\Re z},$$

a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ é absolutamente convergente sse $\Re z > 1$, porque a série dos módulos é a série de Dirichlet, $\sum \frac{1}{n^{\Re z}}$. O módulo da diferença entre a sucessão das somas parciais da série e a soma da série é

$$\left| \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \right| = \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \right| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^z} \right| = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\Re z}}.$$

Seja $\alpha > 1$ e $\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} : \Re z \geq \alpha\}$. Para $z \in \mathcal{S}$,

$$\left| \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \right| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\Re z}} \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } k \to \infty.$$

Designando por $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$, a sucessão das somas parciais $f_k(z) := \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^z}$ é tal que

$$\sup_{z \in \mathcal{S}} |f_k(z) - f(z)| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \to 0 \quad \text{quando } k \to \infty,$$

ou seja, f_k tende uniformemente para f no conjunto $\mathcal{S}$.