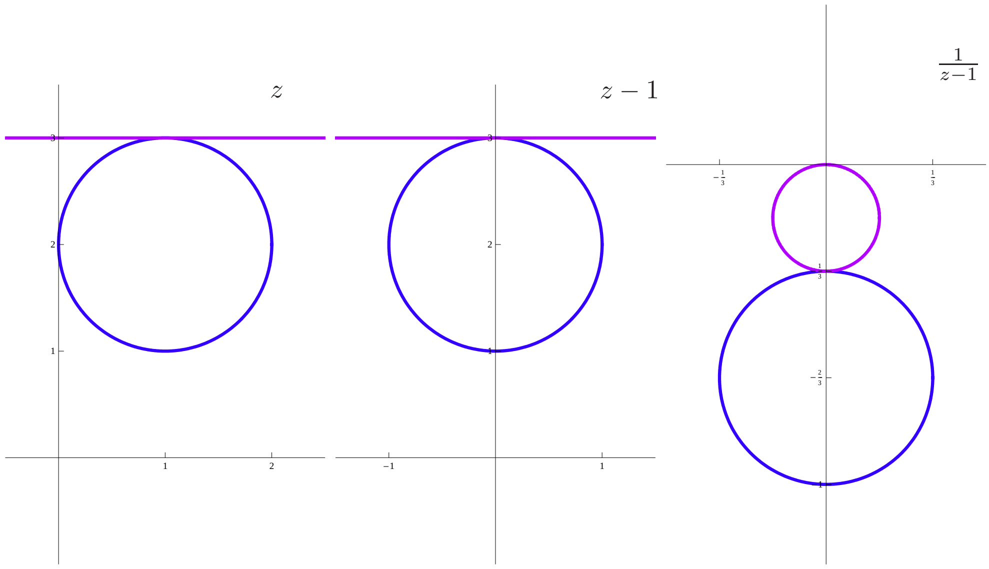
Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Teste - 8 de Novembro de 2008

LEAmb, LEMat, MEBiol e MEQ

Resolução

1.



2. A função $z : [0,1] \to \mathbb{C}$ definida por $z(t) = 1 + t(2i-1)$ é uma parametrização de $\mathcal{C}$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \overline{z}\, dz &= \int_0^1 \overline{z(t)} z'(t)\, dt = \int_0^1 [1 - t(1+2i)](-1+2i)\, dt \\ &= -1 + 2i + |1+2i|^2 \left. \frac{t^2}{2} \right|_{t=0}^{t=1} = \frac{3}{2} + 2i. \end{aligned}$$

3. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_{\frac{i\pi}{4}}^{\frac{i\pi}{2}} (2e^{2z} + \frac{\pi^2}{z^3})\, dz = \left(e^{2z} - \frac{\pi^2}{2z^2} \right) \Bigg|_{z=\frac{i\pi}{4}}^{z=\frac{i\pi}{2}} = -1 + 2 - (i+8) = -7 - i.$$

4.

a)

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2}\frac{1}{(z-1)^2(z+3)}\,dz &= \int_{|z|=2}\frac{\frac{1}{z+3}}{(z-1)^2}\,dz = 2\pi i\left(\frac{d}{dz}\frac{1}{z+3}\right)_{z=1}\\ &= -2\pi i\left(\frac{1}{(z+3)^2}\right)_{z=1} = -\frac{\pi i}{8}.\end{aligned}$$

b) Para expandir $\frac{1}{z+3}$ em torno de $z=1$, fazemos $w=z-1$, escrevemos a fracção em termos de w e expandimos o resultado em torno de $w=0$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+3} &= \frac{1}{w+4} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{w}{4}} = \frac{1}{4}\left(1-\frac{w}{4}+\frac{w^2}{4^2}-\frac{w^3}{4^3}+\dots\right)\\ &= \frac{1}{4}-\frac{z-1}{4^2}+\frac{(z-1)^2}{4^3}-\frac{(z-1)^3}{4^4}+\dots.\end{aligned}$$

Esta expansão é válida para $|z-1|<4$. Logo, a função integranda é

$$\frac{1}{(z-1)^2(z+3)}=\frac{1}{4(z-1)^2}-\frac{1}{4^2(z-1)}+\frac{1}{4^3}-\frac{(z-1)}{4^4}+\frac{(z-1)^2}{4^5}+\dots,$$

para $0<|z-1|<4$. Note-se que a circunferência $|z|=2$ está contida na região onde este desenvolvimento é válido. O integral da primeira parcela da série de Laurent é zero pelo Teorema Fundamental do Cálculo, pois a primeira parcela é a derivada de $-\frac{1}{4(z-1)}$ e a curva é fechada. O integral da soma de todas as parcelas a seguir à segunda é zero pelo Teorema de Cauchy, pois as séries de potências são funções holomorfas no interior do disco de convergência. Resta o integral da segunda parcela, cujo valor é $-\frac{1}{4^2}2\pi i=-\frac{\pi i}{8}$.

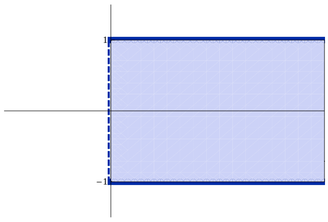
5.

a)

$$f_r=-\frac{i}{r}f_\theta \Leftrightarrow 1=-\frac{i}{r}i\sin\theta \Leftrightarrow 1=\frac{\sin\theta}{r} \Leftrightarrow r=\sin\theta.$$

O campo vectorial de $F:\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^2$ associado a f é diferenciável porque f tem derivadas parciais contínuas. Portanto, f é diferenciável precisamente nos pontos onde satisfaz a equação de Cauchy-Riemann, ou seja, nos pontos $re^{i\theta}=\sin\theta e^{i\theta}$, com $\theta\in]0,\pi[$. A razão pela qual se restringe θ a este intervalo é que $r>0$. A derivada é $f'(\sin\theta e^{i\theta}) = e^{-i\theta}f_r(\sin\theta e^{i\theta})=e^{-i\theta}$.

b) O contradomínio de f é $\{z\in\mathbb{C}:\Re z>0,\ |\Im z|\le 1\}$.



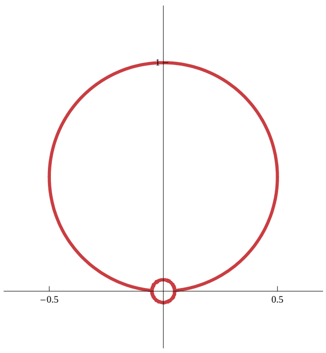
c) A função f não pode ser prolongada por continuidade à origem. De facto, o limite na origem da restrição de f a uma semirecta com origem em zero, é $\lim_{r\to 0} f(re^{i\theta}) = -i\cos\theta$ e portanto depende de θ. Como diferenciabilidade implica continuidade, f também não admite nenhum prolongamento diferenciável à origem.

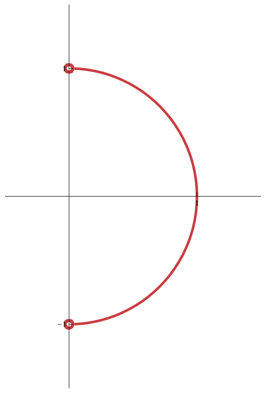
d) O conjunto $\mathcal{D}$ é determinado pela condição $r > 0$ e

$$r = \sin\theta \;\Leftrightarrow\; r^2 = r\sin\theta \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 = y \;\Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Portanto, $\mathcal{D} = \left\{x + iy \in \mathbb{C} : x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ e } (x, y) \neq (0, 0)\right\}$. O conjunto $f(\mathcal{D})$ é constituído pelos complexos da forma

$$\sin\theta - i\cos\theta \;=\; -i(\cos\theta + i\sin\theta) \;=\; e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)} \quad \text{com } \theta \in]0, \pi[.$$





e) Seja $r : I \to \mathbb{C}$ uma parametrização de $\mathcal{D}$. O comprimento de $\mathcal{D}$ é $\int_I |r'(t)|\, dt$. Então a função $s : I \to \mathbb{R}$, definida por $s(t) = f(r(t))$, é uma parametrização de $f(\mathcal{D})$. O comprimento de $f(\mathcal{D})$ é $\int_I |s'(t)|\, dt$. Como f é diferenciável nos pontos de $\mathcal{D}$, $s'(t) = f'(r(t))r'(t)$. Mas $|f'| = 1$, logo $|s'(t)| = |r'(t)|$. Conclui-se que $\mathcal{D}$ e $f(\mathcal{D})$ têm o mesmo comprimento.