Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Teste - 4 de Novembro de 2017

MEC

Duração: 90 minutos

Apresente os cálculos

1. Calcule $\log\left(\frac{e}{2} + i\frac{\sqrt{3}\,e}{2}\right)$, onde o logaritmo é o principal. (1)

2. Escreva e^{z^2} na forma cartesiana. Identifique o seu módulo e argumento. Escreva o desenvolvimento de e^{z^2} em série de potências com centro em 0, indicando a região de validade. (2)

3. Esboce a região S e a sua imagem por f:

a) $S = \left\{z \in \mathbb{C} : |z+1| < 1 \text{ e } \Re z < -\frac{1}{2}\right\}$, $f(z) = \frac{1}{z}$. (2)

b) $S = \{z \in \mathbb{C} : \Re z < 1 \text{ e } -\frac{\pi}{2} < \Im z < 0\}$, $f(z) = e^z$. (2)

4. Calcule $\int_{1+i}^{3+5i} \overline{z}\, dz$, onde a curva que une os extremos do integral é um segmento de recta. (2)

5. Estude a diferenciabilidade de $f(x+iy) = e^{-ix}y^2$ e calcule a sua derivada. (3)

6. Considere a função $g : \mathbb{C} \setminus \{0, 2\} \to \mathbb{C}$, definida por $g(z) = \frac{1}{z^2(z-2)^3}$.

a) Calcule $\int_{|z-3|=2} g(z)\, dz$ usando a fórmula integral de Cauchy, indicando explicitamente a versão da fórmula que está a usar, as suas hipóteses e o conjunto onde a está a aplicar. Simplifique o resultado. (3)

b) Desenvolva g em série de Laurent em torno do ponto 2, numa vizinhança deste ponto com o ponto removido, indicando a região de validade, classificando a singularidade e calculando o resíduo da função neste ponto. (2)

7.

a) Determine todas as soluções de $e^z = e^{\frac{1}{z}}$. Simplifique o resultado. (2)

b) De entre as soluções com parte imaginária positiva, identifique a(s) solução(ões) de menor módulo, se existirem. (1)