

# Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Teste - 5 de Novembro de 2016

LEMat e MEAer

Duração: 90 minutos

**Apresente os cálculos**

1. Apresentando o resultado na forma cartesiana, calcule:

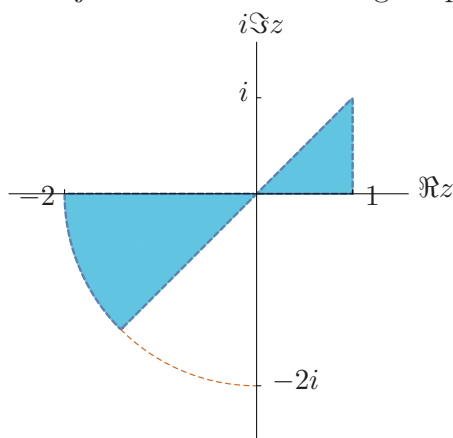
a)  $(1 + i)^7$ ; (1)

b)  $\log(e^{2+5\pi i})$ , onde  $\log$  designa o logaritmo principal; (1)

c) as raízes quadradas de  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ . (1)

d) Determine para que valores de  $z$ , satisfazendo  $\Re z = 1$ ,  $|e^{\frac{-i}{z}}|$  é máximo. (1)

2. Esboce a imagem do conjunto sombreado na figura por  $z \mapsto \frac{1}{z}$ . (2)



3. Considere a função  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por (2)

$$f(re^{i\theta}) = \ln r - i \cos \theta.$$

Estude a diferenciabilidade de  $f$  e calcule a sua derivada.

4.

a) Esboce a curva  $\gamma$  representada parametricamente por  $z(\theta) = \theta e^{-i\theta}$  para  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 3\pi$ . Calcule  $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ , simplificando o resultado. (2)

b) Calcule  $\int_{|z-3|=1} \frac{1}{(z-1)(z-3)^3} dz$  usando a Fórmula Integral de Cauchy. (2)

c) (i) Escreva a série de Laurent da função integranda na alínea anterior numa vizinhança de 3, com o ponto 3 removido, calculando explicitamente todos os coeficientes da série. (ii) Qual a região de validade da expansão? (iii) Classifique a singularidade  $z = 3$ . (iv) Qual é o resíduo da função no ponto 3? (3)

- d) Classifique as singularidades de (2)

$$z \mapsto \frac{e^z - e^{\sin z}}{z^4}$$

e calcule os resíduos da função.

5. Considere a função

$$w \mapsto \log \left( i \frac{w+1}{w-1} \right),$$

onde o logaritmo é o principal.

- a) Qual é o conjunto de pontos onde a função é diferenciável? Justifique. (1.5)
- b) Qual é o conjunto de pontos onde a função não é diferenciável? Justifique. (1.5)