

# Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Teste - 9 de Abril de 2016

LEGM e MEC

Duração: 90 minutos

**Apresente os cálculos**

1. Calcule:

a)  $\frac{3+2i}{1-5i}$  na forma cartesiana; (0.5)

b)  $|2 + 3i|$ ; (0.5)

c)  $\frac{3e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-i}$  na forma polar; (0.5)

d)  $\log(-1 - i)$ ; (0.5)

e) todas as  $\sqrt[3]{-8i}$  na forma polar. (1)

Nota: neste teste log designa o logaritmo principal.

2. Esboce o conjunto  $S$  e a sua imagem por  $f$  quando

a)  $S = \{z \in \mathbb{C} : \Im z < \Re z + 1\}$  e  $f(z) = \frac{1}{z}$ ; (2)

b)  $S = \{z \in \mathbb{C} : \Re z < 0 \text{ e } -\frac{\pi}{4} < \Im z < \frac{\pi}{4}\}$  e  $f(z) = e^z$ . (2)

3. Considere a função  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por (2)

$$f(re^{i\theta}) = \frac{2}{r} - i\theta,$$

onde  $\theta$  é o argumento principal. Estude a diferenciabilidade de  $f$  e calcule a sua derivada.

4. Seja  $L$  o segmento de recta que vai de 1 a  $i$ . Calcule, justificando e simplificando os resultados:

a)  $\int_{|z|=1} \frac{1}{z-3} dz$ ; (1)

b)  $\int_L \left( e^{3\pi z} + \frac{1}{z^3} \right) dz$ ; (2)

c)  $\int_{|z-4|=1} \frac{1}{(z-2)(z-4)(z-6)} dz$ ; (2)

d)  $\int_{|z-4|=1} \frac{\log z + e^{2z}}{(z-4)^3} dz$ . (2)

5. Calcule os quatro primeiros termos do desenvolvimento em série de Laurent (2)

em torno do ponto  $e$  de  $\frac{\log z}{(z-e)^3}$  indicando a região onde o desenvolvimento é válido. Classifique a singularidade. Qual é o resíduo da função no ponto  $e$ ?

6. Usando o Teorema de Green, calcule  $\int_{\gamma} \bar{z} dz$  onde  $\gamma$  é uma curva simples fechada. (2)