Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Teste - 31 de Outubro de 2015

LEGM e MEC

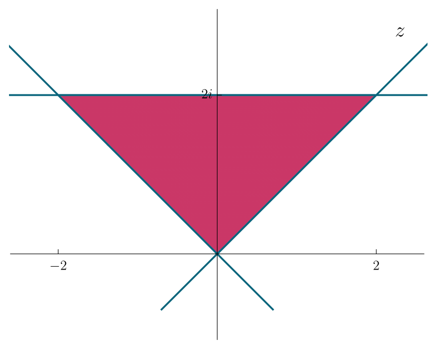
Duração: 90 minutos

Apresente os cálculos

1.

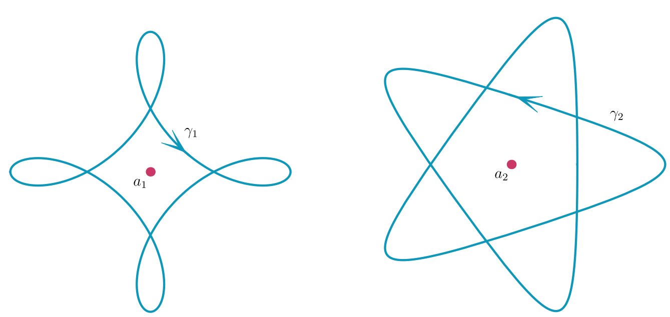
a) $e^z = e^{x+iy}$. Qual o módulo e um argumento de e^z? Escreva e^z na forma cartesiana. Escreva a série de potências de z que representa e^z. Qual a sua região de convergência? (2)

b) Determine a imagem do triângulo da figura por $z \mapsto \frac{1}{z}$? (2)



c) Calcule $\int_1^{\frac{e}{\sqrt{2}}(1+i)} \frac{1}{z}\, dz$ onde a curva que une os extremos do integral está contida no primeiro quadrante. Simplifique o resultado. (2)

d) Escreva os valores de $\int_{\gamma_1} \frac{1}{z-a_1}\, dz$ e de $\int_{\gamma_2} \frac{1}{z-a_2}\, dz$. (1)



e) Escreva a série de Taylor de $\frac{1}{1+z^2}$ em torno de zero. Qual a sua região de convergência? (1)

f) Estude a diferenciabilidade de $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por $f(x+iy) = x^2 + 2ixy$ e calcule a sua derivada. (2)

g) Calcule $\int_{|z|=2} \frac{1}{z(z-1)^2(z-3)}\, dz$. (2)

h) Escreva as duas primeiras parcelas do desenvolvimento em série de Laurent de $\frac{1}{z(z-1)^2(z-3)}$ em torno de 1. Classifique a singularidade $z = 1$. Qual o resíduo em $z = 1$? (2)

2.

a) Escreva e^{e^z} na forma cartesiana. (1)

b) Estude a diferenciabilidade de $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, definida por $f(re^{i\theta}) = r^2 + ir\sin\theta$, e calcule a sua derivada. (2)

c) Obtenha o desenvolvimento em série de Laurent de $\frac{1}{1-z^2}$ que converge para $|z| > 1$. (1)

d) A função $z \mapsto \int_0^z e^{e^w}\, dw$ está bem definida? Justifique. (2)