

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Teste - 2 de Novembro de 2013

LEGM e MEC

Duração: 90 minutos

Apresente os cálculos

1. Calcule:

a) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times (1+i)$ na forma cartesiana; (0.5)

b) $|1+2i|^2$; (0.5)

c) $e^{i\frac{3\pi}{2}}$ na forma cartesiana; (0.5)

d) todas as $\sqrt[3]{27}$ na forma polar; (1)

e) $\log(ie)$, onde \log designa o logaritmo principal; (1)

f) o raio de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$. (0.5)

2. Esboce o conjunto S e a sua imagem por f quando

a) $S = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| < 1\}$ e $f(z) = \frac{1}{z}$; (2)

b) $S = \{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \Re z < 0 \text{ e } -\frac{\pi}{2} < \Im z < 0\}$ e $f(z) = e^z$. (2)

3. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \Re z = 0\} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por (2)

$$f(x+iy) = (x+y) + i\frac{y}{x}.$$

Estude a diferenciabilidade de f e calcule a sua derivada.

4. Seja L o segmento de recta que vai de 1 a i . Calcule, simplificando os resultados:

a) $\int_L \bar{z} dz$; (2)

b) $\int_L z^3 \log z dz$, onde \log designa o logaritmo principal. (2)

5. Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{1, 3\} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)^2}$.

a) Calcule $\int_{|z|=2} f(z) dz$ e simplifique o resultado. (2)

b) Desenvolva f em série de Laurent em torno do ponto 1, indicando a região onde o desenvolvimento é válido (não precisa de calcular os valores numéricos de todos os coeficientes). Classifique a singularidade 1. Calcule o resíduo de f no ponto 1. (2)

6. Analise a continuidade de $z \mapsto \log e^z$ e de $z \mapsto e^{\log z}$; aqui \log designa o logaritmo principal. (2)