Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Teste - 6 de Abril de 2013

MEEC

Duração: 90 minutos

Apresente os cálculos

1. Calcule as raízes cúbicas de -8. (2)

2. Esboce a região $\left\{z \in \mathbb{C} : |z+2| > 1 \text{ e } \Re z < -\frac{1}{2}\right\}$ e a sua imagem por $z \mapsto \frac{1}{z}$. Defina analiticamente o conjunto imagem. (2)

3. Estude a diferenciabilidade de $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por $f(x+iy) = e^{x^2+iy}$. Calcule a derivada de f nos pontos em que é diferenciável. (2)

4. Calcule e simplifique os resultados:

a) $\int_\gamma \overline{z}\, dz$ onde γ é o segmento de recta com início em 1 e fim em $-i$. (2)

b) $\int_1^{\frac{i\pi}{2}} e^{2z}\, dz$. (2)

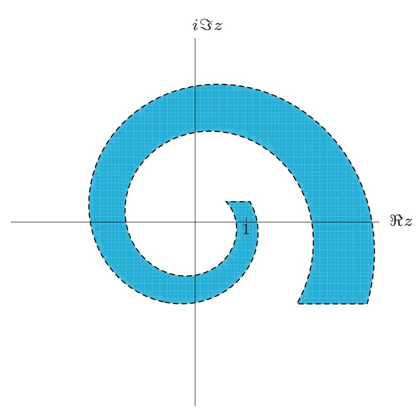
c) $\int_{|z|=2} \frac{1}{(z-1)(z+3)^2}\, dz$. (2)

d) O resíduo de $z \mapsto z^2 e^{\frac{2}{z}}$ na sua singularidade, classificando essa singularidade. (2)

e) Os dois primeiros termos do desenvolvimento em série de Laurent de $z \mapsto \frac{1}{(z^2+1)^2}$ em torno de i, indicando a região onde o desenvolvimento é válido. Calcule o resíduo da função em i e classifique essa singularidade. (2)

f) $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+9}\, dx$ usando integrais de contorno. Justifique. (2)

5. Seja Ω o conjunto representado na figura e $f : \Omega \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \frac{1}{z}$. (2)



A função f é a derivada de uma função holomorfa? Justifique. Em caso afirmativo calcule uma primitiva de f.