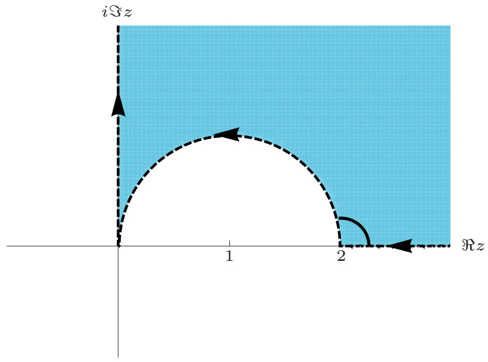
Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Teste - 3 de Novembro de 2012
LMAC, MEBiom e MEFT

Duração: 90 minutos
Apresente os cálculos

1. Considere o domínio sombreado na figura.



a) Calcule a imagem do domínio por $z \mapsto \frac{1}{z}$. (3)

b) Identifique a imagem da fronteira do domínio e o sentido de circulação ao longo da mesma, bem como a imagem do ângulo assinalado. Interprete a relação entre o ângulo assinalado e a sua imagem como feito nas aulas. (1)

2. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, definida por

$$f(re^{i\theta}) = (r \ln r - r^2)e^{i\theta}.$$

a) Estude a diferenciabilidade e calcule a derivada de f. (3)

b) Determine se f pode ser prolongada por continuidade à origem. Em caso afirmativo, estude a diferenciabilidade do prolongamento na origem. (1)

3. Considere $I = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z}\, dz$, onde $\mathcal{C}$ é a curva parametrizada por $z(\theta) = \theta e^{i\theta}$ com $\theta \in [\pi, 2\pi]$.

a) Esboce $\mathcal{C}$. (1)

b) Calcule I usando a definição de integral e/ou o Teorema Fundamental do Cálculo. Simplifique o resultado. (2)

c) Calcule de novo I usando o Teorema de Cauchy e o facto de $\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = i\pi$, onde γ é a semi-circunferência $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \pi \text{ e } \Im z < 0\}$ com ponto inicial em $-\pi$ e ponto final em π. (2)

4. Calcule:

a) O integral (3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 2x + 2}\, dx,$$

usando directamente integrais de contorno.

b) O primeiro termo da série de Laurent de $z \mapsto \frac{1}{z^2-2z+2}$, numa vizinhança de uma das suas singularidades, com a singularidade removida. Indique o domínio onde o desenvolvimento é válido. Classifique a singularidade que escolheu e calcule o resíduo da função na singularidade. (1)

5. Seja $\mathcal{P}$ a projecção estereográfica da esfera de Riemann $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ no plano complexo, identificado com o plano $(x_1, x_2, 0)$.

a) Calcule $\alpha + i\beta = \mathcal{P}(x_1, x_2, x_3)$. (1)

b) Seja $\alpha + i\beta = \mathcal{P}(x_1, x_2, x_3)$ e $\tilde{\alpha} + i\tilde{\beta} = \mathcal{P}[-(x_1, x_2, x_3)]$ a projecção estereográfica do ponto simétrico de (x_1, x_2, x_3). Relacione $\tilde{\alpha} + i\tilde{\beta}$ com o conjugado do inverso de $\alpha + i\beta$. Justifique. (2)