Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Teste - 6 de Novembro de 2010

LMAC, MEBiom e MEFT

Duração: 90 minutos

Apresente os cálculos

1.

a) Determine o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n} z^n$. (1)

b) Calcule as raízes cúbicas de $-8i$ e assinale-as no plano complexo. (2)

c) Esboce o conjunto dos complexos que satisfaz (2)

$$-(1+2i)z - (1-2i)\overline{z} - 4 = 0.$$

2. Calcule e simplifique o resultado.

a) $\int_L \overline{z}\, dz$, onde L é o segmento de recta com início em -2 e fim em i. (2)

b) $\int_1^{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} \frac{1}{z}\, dz$, onde a curva que une 1 a $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ está contida no primeiro quadrante. (2)

c) $\int_{|z|=2} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}z}}{(z-1)(z-3)}\, dz$. (2)

d) O desenvolvimento em série de Laurent em torno de π de $\frac{\sin z}{(z-\pi)^3}$, indicando a região onde é válido. Simplifique o resultado. Classifique as singularidades da função. (2)

3. Esboce o conjunto S e a sua imagem pela função f.

a) $S = \left\{ z \in \mathbb{C} : \Re z < 0 \right\}$, $f(z) = \sqrt{z}$, onde a raiz é a principal. (2)

b) $S = \left\{ z \in \mathbb{C} : \Re z > 1,\ \Im z < 0 \right\}$, $f(z) = \frac{1}{z+i}$. (2)

4. Seja $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$. Suponha que (f_n) é uma sucessão de funções holomorfas definidas no conjunto $\Omega = B_r(a)$, convergindo uniformemente para f, e γ é uma curva de comprimento finito em Ω.

a) Prove que $\int_\gamma f_n(z)\, dz \to \int_\gamma f(z)\, dz$. (1)

b) Prove que f é holomorfa. (1)

c) O resultado da alínea anterior permaneceria válido se Ω fosse um domínio não simplesmente conexo? Justifique. (1)