Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Teste - 7 de Novembro de 2009

LMAC, MEBiom, MEFT

Duração: 90 minutos

Apresente os cálculos

1. Esboce o conjunto S e a sua imagem pela função f.

a) $S = \left\{z \in \mathbb{C} : |z - (1+i)| = \sqrt{2}\right\}$, $f(z) = (1+i)z$. (1)

b) $S = \left\{z \in \mathbb{C} : 1 < \Re z < 2,\ -\frac{\pi}{4} < \Im z < \frac{\pi}{2}\right\}$, $f(z) = e^z$. (2)

c) $S = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}\right\}$, $f(z) = \frac{1}{z+1}$. (2)

2. Estude a diferenciabilidade da função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \cos(\overline{z})$. Justifique. (2)

3. Calcule

a) $\int_L \overline{z}\, dz$, onde L é o segmento de recta com início em 1 e fim em i. (2)

b) $\int_e^i \frac{1}{z}\, dz$ onde a curva que une e a i está contida no primeiro quadrante e dá uma volta em torno de $e + i$. (2)

4. Calcule o integral, com a curva percorrida uma vez no sentido directo, e classifique, justificando, as singularidades isoladas da função integranda.

a) $\int_{|z+i|=1} \frac{1}{z^2+1}\, dz$. (2)

b) $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\log(1+z)}{z^3}\, dz$, onde log designa o logaritmo principal. (3)

5. Sejam $x_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e $y_0 \in]0, +\infty[$. Determine a imagem da recta horizontal $\Im z = y_0$ e da recta vertical $\Re z = x_0$ por $z \mapsto \cos z$. (2)

6. Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$. Para que valores de $z \in \mathbb{C}$ é absolutamente convergente? Analise a sua convergência uniforme. (2)