Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Teste - 8 de Novembro de 2008

LEAmb, LEMat, MEBiol e MEQ

Duração: 90 minutos

Apresente os cálculos

1. Determine geometricamente a imagem por $z \mapsto \frac{1}{z-1}$ de (3)

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - (1 + 2i)| = 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \Im z = 3\}.$$

2. Usando a definição, calcule $\int_{\mathcal{C}} \overline{z}\, dz$, onde $\mathcal{C}$ é o segmento de recta que vai de 1 a $2i$. (3)

3. Calcule $\int_{\frac{i\pi}{4}}^{\frac{i\pi}{2}} (2e^{2z} + \frac{\pi^2}{z^3})\, dz$ sobre uma curva que não passe por zero. (2)

4. Considere o integral $\int_{|z|=2} \frac{1}{(z-1)^2(z+3)}\, dz$.

a) Calcule o integral usando as Fórmulas Integrais de Cauchy. (2)

b) Determine a expansão da função integranda em série de Laurent em torno do ponto 1. Integre essa série e confirme o resultado da alínea anterior. Justifique cuidadosamente. (3)

5. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(re^{i\theta}) = r - i\cos\theta, \qquad r > 0,\ \theta \in \mathbb{R}.$$

a) Usando a equação de Cauchy-Riemann na forma polar, $f_r = -\frac{i}{r} f_\theta$, e $f' = e^{-i\theta} f_r$, determine o conjunto de pontos $\mathcal{D}$ onde f é diferenciável e calcule a derivada de f em $\mathcal{D}$. (2)

b) Esboce no plano complexo o contradomínio de f. (2)

c) A função f admite um prolongamento que seja contínuo na origem? E diferenciável? (1)

d) Esboce cuidadosamente $\mathcal{D}$ e $f(\mathcal{D})$. Justifique. (1)

e) Relacione os comprimentos de $\mathcal{D}$ e de $f(\mathcal{D})$. Justifique. (1)