Análise Complexa e Equações Diferenciais
MEAer, 2020/2021, S1
Quartos mini testes

1. Considere o sistema $\dot{X} = AX$, com

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Factorize A na forma $A = S\Lambda S^{-1}$ ou $A = SJS^{-1}$. Calcule e^{At} e a solução da equação diferencial que satisfaz $X(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$. Esboce o retrato de fase do sistema. Indique para que condições iniciais se tem $\lim_{t\to+\infty} X(t) = 0$.
Resposta:

$$\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{2t} & -2e^{-t} + 2e^{2t} \\ e^{-t} - e^{2t} & -e^{-t} + 2e^{2t} \end{bmatrix}.$$

2. Considere o sistema $\dot{X} = AX$, com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Factorize A na forma $A = S\Lambda S^{-1}$ ou $A = SJS^{-1}$. Calcule e^{At} e a solução da equação diferencial que satisfaz $X(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$. Esboce o retrato de fase do sistema tendo o cuidado de indicar a direcção segundo a qual as trajectórias tendem para a origem. Mostre analiticamente que se a condição inicial (x_0, y_0) pertence ao primeiro quadrante, então $X(t)$ pertence ao quarto quadrante para t suficientemente grande.
Resposta:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -e^{-2t} + 2e^{-t} & -2e^{-2t} + 2e^{-t} \\ e^{-2t} - e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}.$$

3.

a) Considere o sistema $\dot{X} = AX$, com

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Factorize A na forma $A = S\Lambda S^{-1}$ ou $A = SJS^{-1}$. Calcule e^{At} e a solução da equação diferencial que satisfaz $X(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$.

b) Esboce o retrato de fase do sistema $\dot{X} = AX$ para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sugestão: marque vectores $\dot{X}$ no plano (x, y).

Resposta:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$e^{At} = e^{-t} \begin{bmatrix} 1-2t & t \\ -4t & 1+2t \end{bmatrix}.$$

4.

a) Considere o sistema $\dot{X} = AX$, com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Factorize A na forma $A = S\Lambda S^{-1}$ ou $A = SJS^{-1}$. Calcule e^{At} e a solução da equação diferencial que satisfaz $X(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$.

b) Esboce o retrato de fase do sistema $\dot{X} = AX$ para

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resposta:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$e^{At} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1-2t & -t \\ 4t & 1+2t \end{bmatrix}.$$

5. Considere o sistema $\dot{X} = AX$, com

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Factorize A na forma $A = S\Lambda S^{-1}$ ou $A = SJS^{-1}$. Calcule e^{At} e a solução da equação diferencial que satisfaz $X(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$. Esboce o retrato de fase do sistema tendo o cuidado de indicar a direcção segundo a qual as trajectórias saem da origem.

Resposta:

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -2e^{2t} + 3e^{3t} & 6e^{2t} - 6e^{3t} \\ -e^{2t} + e^{3t} & 3e^{2t} - 2e^{3t} \end{bmatrix}.$$

6. Considere o sistema $\dot{X} = AX$, com

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Factorize A na forma $A = S\Lambda S^{-1}$ ou $A = SJS^{-1}$. Calcule e^{At} e a solução da equação diferencial que satisfaz $X(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$. Esboce o retrato de fase do sistema.

Resposta:

$$\begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$e^{At} = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1-2t & -4t \\ t & 1+2t \end{bmatrix}.$$

1. Determine um factor integrante da forma $\mu = \mu(ty)$ para a equação diferencial

$$(3y^2 + 8ty) + (4ty + 6t^2)y' = 0.$$

Não precisa de resolver a equação.

Resposta: $\mu = (ty)^2$.

2. Calcule as iteradas de Picard y_0, y_1 e y_2 para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = y^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Resposta: $y_0(t) \equiv 1$, $y_1(t) = 1 + t$, $y_2(t) = 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{3}$.

3. Resolva a equação exacta

$$[(y + y^2 t)e^{ty} + 2t] + (t + t^2 y)e^{ty} y' = 0$$

(não precisa de obter uma expressão explícita para y).
Resposta: $tye^{ty} + t^2 = c$.

4. Com o auxílio da função $v = \frac{y}{t}$, determine a solução da equação homogénea

$$y' = \frac{y}{t} + \left(\frac{y}{t}\right)^4$$

que satisfaz $y(1) = 1$.
Resposta: $y = \frac{t}{\sqrt[3]{1 - 3\ln t}}$.

5. Determine um factor integrante da forma $\mu = \mu(ty)$ para a equação diferencial

$$2t^3 y - (t^4 + t^2 y^2)y' = 0.$$

Não precisa de resolver a equação.
Resposta: $\mu = (ty)^{-2}$.

6. Determine um factor integrante da forma $\mu = \mu(y)$ para a equação diferencial

$$2ty - (t^2 + y^2)y' = 0$$

e determine a solução que satisfaz $y(0) = y_0$, onde $y_0 > 0$.
Resposta: $\mu = \frac{1}{y^2}$, $y = \frac{y_0 + \sqrt{y_0^2 + 4t^2}}{2}$.