Análise Complexa e Equações Diferenciais
MEAer, 2020/2021, S1
Terceiros mini testes

1. Escreva a expansão em série de Laurent em torno de 0 de $e^{\frac{1}{z}} - \sin\frac{1}{z} - \cos\frac{1}{z}$, simplificando o resultado. Indique a região onde o desenvolvimento é válido, classifique a singularidade $z = 0$ e indique o resíduo nessa singularidade.
Resposta: $2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+4)!z^{2n+4}} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)!z^{3n+4}}$, válido para $z \neq 0$. A origem é uma singularidade essencial e o resíduo no ponto 0 vale 0.

2. Escreva a expansão de $\frac{1}{z^2+9}$ numa vizinhança de $3i$ (com o ponto $3i$ removido), indicando todos os coeficientes da série de Laurent, a região onde o a expansão é válida, classificando a singularidade $3i$ e identificando o resíduo em $3i$.
Resposta: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-3i)^{n-1}}{(6i)^{n+1}}$, válido para $0 < |z-3i| < 6$. Polo de primeira ordem com resíduo $\frac{1}{6i}$.

3. Escreva a expansão de $\frac{\log(z+2)}{z^3}$ em torno de 0, indicando todos os coeficientes da série de Laurent, a região onde o a expansão é válida, classificando a singularidade 0 e identificando o resíduo em 0.
Resposta: $\frac{\ln(2)}{z^3} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n-2}}{2^{n+1}(n+1)}$, válido para $0 < |z| < 2$. Polo de terceira ordem com resíduo $-\frac{1}{8}$.

4. Calcule os quatro primeiros termos da expansão de e^{z+z^2} em torno de zero. Classifique a singularidade de $\frac{e^{z+z^2}}{z^4}$ e diga qual é o seu resíduo.
Resposta: $e^{z+z^2} = 1 + z + \frac{3}{2}z^2 + \frac{7}{3!}z^3 + \ldots$. Polo de quarta ordem com resíduo $\frac{7}{6}$.

5. Escreva a expansão em série de Laurent de $\frac{2}{(z+2)(z+4)}$ na região $2 < |z| < 4$. Identifique as singularidades essenciais da função, caso existam.
Resposta: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{n-1}}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{4^{n+1}}$. A função tem dois polos de primeira ordem, não tem qualquer singularidade essencial.

6. Escreva a expansão em série de Laurent de $\frac{1}{(1+z)^2}$ na região $|z| > 1$. Classifique as singularidades da função e indique os resíduos nessas singularidades.
Resposta: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{z^{n+2}}$. A função tem um polo de segunda ordem em $z = -1$ com resíduo igual a 0.

1. Esboce o campo de direcções e os gráficos das soluções de $y' = \frac{1}{y}$.

2. Esboce o campo de direcções e os gráficos das soluções de $y' = \log y$.

3. Esboce o campo de direcções e os gráficos das soluções de $y' = \frac{y+1}{y}$.

4. Esboce o campo de direcções e os gráficos das soluções de $y' = \frac{1}{e^y - 1}$.

5. Esboce o campo de direcções e os gráficos das soluções de $y' = \arctan y$.

6. Esboce o campo de direcções e os gráficos das soluções de $y' = \frac{1}{|y-1|}$.

1. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \pi y' = \frac{e^{t-2y}}{1+e^{2t}}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Resposta: $y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2}{\pi} \arctan(e^t) + \frac{1}{2} \right)$.

2. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} (t+1)y' = y + (t+1)^2 t^2 e^t, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Resposta: $y = (t+1)(t^2 - 2t + 2)e^t$.

3. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = \frac{t+1}{t^2+1} \sqrt[3]{y}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Resposta: $y = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{3}\ln(t^2+1) + \frac{2}{3}\arctan t\right)^3}$.

4. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} ty' = t^5 \ln t + 3y, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Resposta: $y = \frac{t^5}{2} \ln t - \frac{t^5}{4} + \frac{5t^3}{4}$.

5. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = \tan t \, \cos^2 y, \\ y(0) = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Resposta: $y = \arctan\left(\sqrt{3} - \ln \cos t\right)$.

6. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = \frac{e^t}{(t+1)(t+2)} + y, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Resposta: $y = e^t \ln\left(2\left(\frac{t+1}{t+2}\right)\right)$.