Análise Complexa e Equações Diferenciais
MEAer, 2020/2021, S1
Primeiros mini testes

1. Sejam $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $k, l \in \mathbb{R}$. Admitindo que as rectas

$$a\overline{z} + \overline{a}z + k = 0 \qquad \text{e} \qquad b\overline{z} + \overline{b}z + l = 0$$

não são paralelas, determine o ponto em que se intersectam. Caracterize, de uma forma tão simples quanto possível, a relação entre a e b quando as rectas são paralelas e explique em que casos as duas equações descrevem a mesma recta.
Resposta: $z = \frac{la-kb}{\overline{a}b-a\overline{b}}$. As rectas são paralelas sse $\frac{a}{b}$ é real. Coincidem sse k e l são ambos não nulos e $\frac{a}{b} = \frac{k}{l}$, ou se k e l são ambos nulos e $\frac{a}{b}$ é real.

2. Seja $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Identifique o lugar geométrico dos pontos z tais que

$$\Re\left(\frac{z}{a}\right) = 1.$$

Resposta: Recta que passa por a e é perpendicular a a. $z = a + ita$ com $t \in \mathbb{R}$. $a\overline{z} + \overline{a}z = 2|a|^2$. Imagem de $\Re w = 1$ por $w \mapsto aw$.

3. Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ com $z_1 \neq z_2$. Escreva a equação cartesiana, da forma $\overline{a}z + a\overline{z} + k = 0$ (com $k \in \mathbb{R}$), da mediatriz do segmento que une z_1 a z_2.
Resposta:

$$|z - z_1| = |z - z_2| \iff (z_1 - z_2)\overline{z} + (\overline{z}_1 - \overline{z}_2)z = |z_1|^2 - |z_2|^2.$$

4. Seja p um número real, com $p > 1$. Considere a circunferência de equação

$$|z|^2 - p\overline{z} - pz + 1 = 0.$$

Determine o centro z_0 da circunferência. Determine o ponto z_1, no semiplano superior, em que a circunferência intersecta a circunferência de raio igual a 1 centrada na origem. Determine $\frac{z_1-z_0}{z_1}$. Qual é a posição relativa da recta que une z_0 a z_1 e da circunferência de raio igual a 1 centrada na origem?
Resposta: $z_0 = p$, $z_1 = \frac{1}{p} + i\frac{\sqrt{p^2-1}}{p}$, $\frac{z_1-z_0}{z_1} = i\sqrt{p^2-1}$. A recta que une z_0 a z_1 e a circunferência de raio igual a 1 centrada na origem são tangentes.

5. Identifique as rectas cuja equação cartesiana pode ser escrita na forma $\overline{a}z + a\overline{z} = 1$. Caracterize os valores de a para os quais $\overline{a}z + a\overline{z} = 1$ é a equação de uma recta tangente à circunferência de raio um centrada na

origem.
Resposta: Trata-se de rectas que não passam na origem. A recta tangente à circunferência de raio um centrada na origem em $e^{i\theta}$ tem equação $e^{-i\theta}z + e^{i\theta}\overline{z} = 2$. Se $|a| = \frac{1}{2}$, então $\overline{a}z + a\overline{z} = 1$ é a equação de uma recta tangente à circunferência de raio um centrada na origem.

6. Determine o ponto da recta de equação

$$(1 - 2i)z + (1 + 2i)\overline{z} - 3 = 0$$

mais próximo de $3 + 3i$.
Resposta: A recta que passa por $3 + 3i$ e é perpendicular à recta dada tem equação paramétrica $z = 3 + 3i + t(1 + 2i)$, com $t \in \mathbb{R}$. Substituindo este z na equação da recta, obtém-se $t = -\frac{3}{2}$. Portanto, a intersecção das duas rectas ocorre em $\frac{3}{2}$, que é o ponto pedido.

1. Esboce o conjunto

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \ \Im z > -\Re z \ \wedge \ |z| > \frac{1}{2} \right\}$$

e a sua imagem por $z \mapsto \frac{1}{z+1}$.
Resposta:

$$\left\{ w \in \mathbb{C} : \ \left| w - \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right) \right| < \frac{\sqrt{2}}{2} \ \vee \ \left| w - \frac{4}{3} \right| > \frac{2}{3} \right\}.$$

2. Esboce o conjunto

$$\{ z \in \mathbb{C} : \ \Im z < 0 \ \wedge \ \Im z < -\Re z \ \wedge \ |z| < 4 \}$$

e a sua imagem por $z \mapsto \sqrt{(1 - i)z}$, onde a raiz é a principal.
Resposta:

$$\left\{ w \in \mathbb{C} : \ \left(-\frac{\pi}{2} < \arg w < -\frac{\pi}{4} \ \vee \ \frac{3\pi}{8} < \arg w \leq \frac{\pi}{2} \right) \ \wedge \ |w| < 2\sqrt[4]{2} \right\}.$$

3. Esboce o conjunto

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \ -1 < \Re z < 2 \ \wedge \ -\frac{\pi}{6} < \Im z < \frac{\pi}{3} \right\}$$

e a sua imagem por $z \mapsto -e^z$.
Resposta:

$$\left\{w \in \mathbb{C}:\ e^{-1} < |w| < e^2 \ \wedge\ \frac{5\pi}{6} < \arg w < \frac{4\pi}{3}\right\}.$$

4. Esboce o conjunto

$$\left\{z \in \mathbb{C}:\ e^{-1} < |z| < e\right\}$$

e a sua imagem por $z \mapsto 1 + 2\log z$, onde o logaritmo é o principal.
Resposta:

$$\{w \in \mathbb{C}:\ -1 < \Re w < 3 \ \wedge\ -2\pi < \Im w \leq 2\pi\}.$$

5. Esboce o conjunto

$$\left\{z \in \mathbb{C}:\ |z| < 1 \ \wedge\ |z - (1+i)| < 1 \ \wedge\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\right\}$$

e a sua imagem por $z \mapsto \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$.
Resposta:

$$\left\{w \in \mathbb{C}:\ |w| > 1 \ \wedge\ |w - (1+i)| < 1 \ \wedge\ 0 < \arg w < \frac{\pi}{4}\right\}.$$

6. Esboce o conjunto

$$\{z \in \mathbb{C}:\ 0 < \Im z < 1 \ \wedge\ \Re z < 0 \ \wedge\ |z - i| < 1\}$$

e a sua imagem por $z \mapsto \frac{1}{z}$.
Resposta:

$$\left\{w \in \mathbb{C}:\ \Re w < 0 \ \wedge\ \Im w < -\frac{1}{2} \ \wedge\ \left|w + \frac{i}{2}\right| > \frac{1}{2}\right\}.$$