Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Exame - 25 de Janeiro de 2010

LMAC, MEBiom e MEFT

Resolução

1. Trata-se de uma série de potências de z, uma série da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, com $a_n = 1$ se $n = 2^k$ para algum $k \in \mathbb{N}_0$, e $a_n = 0$ caso contrário. O raio de convergência da série é dado por $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = 1$.

2.

a) Podemos escrever a equação diferencial na forma

$$\begin{aligned}(D^4 - \mu^4)u = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (D^2 - \mu^2)(D^2 + \mu^2)u = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (D - \mu)(D + \mu)(D^2 + \mu^2)u = 0.\end{aligned}$$

A solução geral é

$$\begin{aligned}u(t) &= \tilde{c}_1 e^{\mu t} + \tilde{c}_2 e^{-\mu t} + c_3 \cos(\mu t) + c_4 \sin(\mu t) \\ &= c_1 \cosh(\mu t) + c_2 \sinh(\mu t) + c_3 \cos(\mu t) + c_4 \sin(\mu t),\end{aligned}$$

onde c_1, c_2, c_3 e c_4 são constantes.

b) Tem-se

$$\begin{aligned}u(0) &= c_1 + c_3, \\ u''(0) &= \mu^2(c_1 - c_3).\end{aligned}$$

Assim, as igualdades $u(0) = u''(0) = 0$ implicam $c_1 = c_3 = 0$ e $u(t) = c_2 \sinh(\mu t) + c_4 \sin(\mu t)$. Com u desta forma,

$$\begin{aligned}u(l) &= c_2 \sinh(\mu l) + c_4 \sin(\mu l) \\ u''(l) &= \mu^2(c_2 \sinh(\mu l) - c_4 \sin(\mu l)).\end{aligned}$$

Podemos escrever o sistema $u(l) = u''(l) = 0$ na forma

$$\begin{bmatrix} \sinh(\mu l) & \sin(\mu l) \\ \sinh(\mu l) & -\sin(\mu l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O sistema tem soluções não triviais quando $\sinh(\mu l)\sin(\mu l) = 0$. Como μ e l são positivos, desta equação tira-se $\sin(\mu l) = 0$, ou seja, $\mu = \frac{n\pi}{l}$ para algum $n \in \mathbb{N}_1$. Para estes valores de μ, $u(l) = c_2 \sinh(\mu l)$ e $u''(l) = \mu^2 c_2 \sinh(\mu l)$. Portanto, $c_2 = 0$ e

$$u(t) = c_4 \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right).$$

3.

a) A equação é separável, podendo ser escrita na forma canónica

$$\frac{1}{\sqrt{1+w^2}}\frac{dw}{dx} = \frac{1}{a}.$$

Assim,

$$\frac{d}{dw}\operatorname{arcsinh} w \frac{dw}{dx} = \frac{1}{a}.$$

Pela derivada da função composta,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsinh} w = \frac{1}{a}.$$

Primitivando ambos os membros em ordem a x,

$$\operatorname{arcsinh}(w(x)) = \frac{x}{a} + c_1,$$

onde c_1 é uma constante. Finalmente,

$$w(x) = \sinh\Big(\frac{x}{a} + c_1\Big).$$

b) Usando o resultado da alínea anterior,

$$\frac{dy}{dx}(x) = \sinh\Big(\frac{x}{a} + c_1\Big).$$

Primitivando novamente em ordem a x,

$$y(x) = a\cosh\Big(\frac{x}{a} + c_1\Big) + c_2,$$

onde c_2, tal como c_1, é uma constante.

4. Usando o desenvolvimento em série de potências da função seno,

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots,$$

para todo o $z \neq 0$. Logo,

$$z^2\sin\frac{1}{z} = z - \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!z^3} - \frac{1}{7!z^5} + \dots,$$

para todo o $z \neq 0$, e

$$\int_{|z|=1} z^2 \sin\frac{1}{z}\,dz =$$

$$\int_{|z|=1} z\,dz - \frac{1}{3!}\int_{|z|=1}\frac{1}{z}\,dz + \int_{|z|=1}\left(\frac{1}{5!z^3} - + \frac{1}{7!z^5} + \ldots\right)dz.$$

Pelo Teorema de Cauchy o primeiro integral do segundo membro vale 0. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo o terceiro integral do segundo membro vale 0. Portanto, o integral do pretendido vale $-\frac{2\pi i}{3!} = -\frac{\pi i}{3}$.

A função integranda tem uma singularidade essencial na origem porque a sua série de Laurent, em torno de zero, tem potências de ordem arbitrariamente elevada de $\frac{1}{z}$.

5.

a) A condição $u(-\pi,0) = u(\pi,0)$ implica $u_0(-\pi) = u_0(\pi)$. A condição $u_\theta(-\pi,0) = u_\theta(\pi,0)$ implica $u_0'(-\pi) = u_0'(\pi)$. Derivando, em ordem a t, ambos os membros da igualdade $u(-\pi,t) = u(\pi,t)$, obtém-se $u_t(-\pi,t) = u_t(\pi,t)$. Usando a equação do calor, $u_{\theta\theta}(-\pi,t) = u_{\theta\theta}(\pi,t)$. Em particular, $u_{\theta\theta}(-\pi,0) = u_{\theta\theta}(\pi,0)$. Assim, $u_0''(-\pi) = u_0''(\pi)$. Portanto, as condições de compatibilidade são

$$u_0(-\pi) = u_0(\pi), \quad u_0'(-\pi) = u_0'(\pi) \quad \text{e} \quad u_0''(-\pi) = u_0''(\pi).$$

b) Para cada t fixo, com $t \geq 0$,

$$u(\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}[a_n(t)\cos(n\theta) + b_n(t)\sin(n\theta)].$$

Derivando formalmente uma vez em ordem a t,

$$u_t(\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}[a_n'(t)\cos(n\theta) + b_n'(t)\sin(n\theta)],$$

e derivando formalmente duas vezes em ordem a θ,

$$u_{\theta\theta}(\theta,t) = -\sum_{n=0}^{\infty}[n^2a_n(t)\cos(n\theta) + n^2b_n(t)\sin(n\theta)].$$

Para que u satisfaça a equação do calor, deve ter-se

$$\sum_{n=0}^{\infty}[a_n'(t)\cos(n\theta) + b_n'(t)\sin(n\theta)] =$$

$$-\alpha\sum_{n=0}^{\infty}[n^2a_n(t)\cos(n\theta) + n^2b_n(t)\sin(n\theta)].$$

Da unicidade dos coeficientes de Fourier,

$$a_n'(t) = -\alpha n^2 a_n(t), \qquad b_n'(t) = -\alpha n^2 b_n(t).$$

Conclui-se

$$a_n(t) = c_n e^{-\alpha n^2 t}, \qquad b_n(t) = d_n e^{-\alpha n^2 t}$$

e

$$u(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [c_n e^{-\alpha n^2 t} \cos(n\theta) + d_n e^{-\alpha n^2 t} \sin(n\theta)].$$

Para garantir a condição inicial,

$$u(\theta, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} [c_n \cos(n\theta) + d_n \sin(n\theta)] = u_0(\theta).$$

Esta igualdade mostra que os c_n's e os d_n's são os coeficientes de Fourier de u_0. Logo,

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_0(\theta)\, d\theta, \\ c_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_0(\theta) \cos(n\theta)\, d\theta \quad \text{para } n \neq 0, \\ d_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_0(\theta) \sin(n\theta)\, d\theta. \end{aligned}$$

c) No caso em que $u_0(\theta) = \sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))$, por unicidade dos coeficientes de Fourier, $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{1}{2}$ e todos os restantes coeficientes de Fourier se anulam. A solução é

$$u(\theta, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-4\alpha t} \cos(2\theta).$$

6.

a) Uma vez que $|f'(t_0)| = |g'(t_0)| \neq 0$, o módulo de $\frac{f'(t_0)}{g'(t_0)}$ é igual a 1. Assim, a transformação $\mathcal{L}_{t_0}$ é composta por translações e rotações. Mais precisamente, em primeiro lugar, faz-se uma translação do plano complexo de modo a o ponto $g(t_0)$ ter como imagem a origem. Em seguida, faz-se uma rotação do plano complexo. Finalmente, faz-se outra translação do plano complexo de modo à origem, que correspondia inicialmente ao ponto $g(t_0)$, ter como imagem o ponto $f(t_0)$.

b) Por cálculo directo, $\mathcal{L}_{t_0}(g(t_0)) = f(t_0)$. Obtém-se uma representação paramétrica de $\mathcal{L}_{t_0}(\mathcal{C}_2)$ compondo $\mathcal{L}_{t_0}$ com g. Isto conduz a

$$t \longmapsto \mathcal{L}_{t_0}(g(t)) = f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{g'(t_0)}[g(t) - g(t_0)].$$

Uma vez que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}_{t_0}(g(t)) = \frac{f'(t_0)}{g'(t_0)}g'(t),$$

vem

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}_{t_0}(g(t))\Big|_{t=t_0} = \frac{f'(t_0)}{g'(t_0)}g'(t_0) = f'(t_0).$$

Um vector tangente a $\mathcal{L}_{t_0}(\mathcal{C}_2)$ em $\mathcal{L}_{t_0}(g(t_0))$ é $f'(t_0)$. Assim, $\mathcal{L}_{t_0}(\mathcal{C}_2)$ é tangente a $\mathcal{C}_1$ no ponto $f(t_0)$.

c) Quando t varia de 0 a t_0, o comprimento percorrido sobre $\mathcal{C}_1$, entre $f(0)$ e $f(t_0)$, é

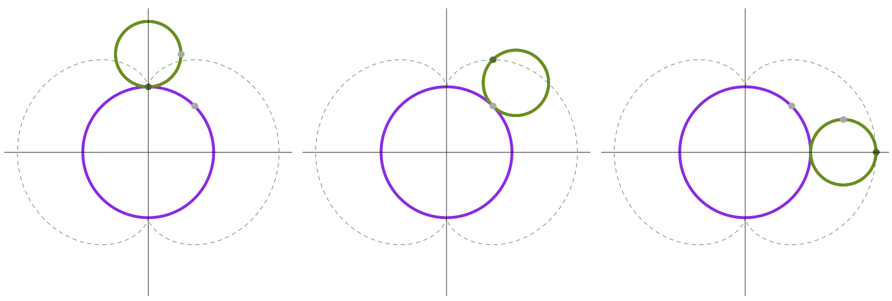
$$\int_0^{t_0} |f'(\tau)|\, d\tau$$

e o comprimento percorrido sobre $\mathcal{C}_2$, entre $g(0)$ e $g(t_0)$ é

$$\int_0^{t_0} |g'(\tau)|\, d\tau.$$

Uma vez que $|f'(\tau)| = |g'(\tau)|$, para todo o τ, estes comprimentos são iguais.

d) A curva $\mathcal{L}_t(\mathcal{C}_2)$ rola sobre a curva $\mathcal{C}_1$ quando t varia. Por exemplo, no caso particular que serve para ilustrar o enunciado do problema, obtêm-se as figuras seguintes para $\mathcal{L}_0(\mathcal{C}_2)$, $\mathcal{L}_{\frac{\pi}{4}}(\mathcal{C}_2)$ e $\mathcal{L}_{\frac{\pi}{2}}(\mathcal{C}_2)$.



Marcou-se a tracejado a curva representada parametricamente por $t \mapsto \mathcal{L}_t(i)$.

e) As funções f e g satisfazem todas as hipóteses do enunciado do problema. Usando a definição de $\mathcal{L}_t$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_t(i) &= f(t) + \frac{f'(t)}{g'(t)}[i - g(t)] \\
&= t + i(1-\cosh t) + \frac{1 - i\sinh t}{\cosh t}(i - \sinh t) \\
&= t + i(1-\cosh t) + i\frac{1+\sinh^2 t}{\cosh t} \\
&= t + i(1-\cosh t) + i\frac{\cosh^2 t}{\cosh t} \\
&= t + i(1-\cosh t) + i\cosh t \\
&= t + i.
\end{aligned}$$

A curva representada parametricamente por $t \mapsto \mathcal{L}_t(i)$ é a recta $\Im z = 1$.