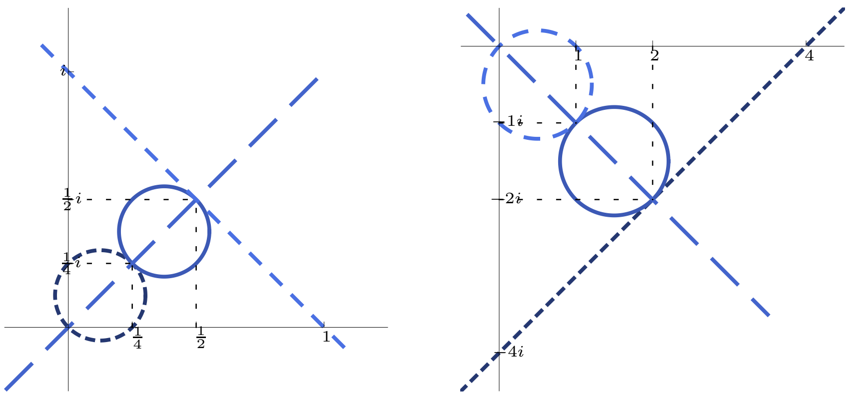
Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Exame - 29 de Janeiro de 2009

LEAmb, LEMat, MEBiol e MEQ

Resolução

1.



Os planos z e $\frac{1}{z}$.

A imagem da recta que passa na origem é uma recta que passa na origem, porque se a original passa em zero a imagem passa em infinito, e se a original passa em infinito a imagem passa em zero. Como os os argumentos dos pontos não nulos da recta original são $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$, os argumentos dos pontos não nulos da recta imagem são $-\frac{\pi}{4}$ e $-\frac{5\pi}{4}$.

A imagem da circunferência que passa na origem é uma recta, porque se o original passa em zero a imagem passa em infinito. Como a circunferência original passa em $\frac{1}{4}$ e $\frac{i}{4}$, a recta imagem passa nos inversos, 4 e $-4i$. O ponto da circunferência original mais distante da origem fica a $\frac{\sqrt{2}}{4}$ unidades de comprimento, portanto o ponto da recta imagem mais perto da origem fica a $\frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ unidades de comprimento.

A imagem da recta que não passa na origem é uma circunferência, porque se a original não passa em zero a imagem não passa em infinito. Como a recta original passa em infinito, a circunferência imagem passa na origem. Como a recta original passa em 1 e i, a circunferência imagem passa em 1 e $-i$. O ponto da recta original mais próximo da origem fica a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ unidades de comprimento, portanto o ponto da circunferência imagem mais distante da origem fica a $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ unidades de comprimento.

Finalmente, a imagem da circunferência que não passa na origem é uma circunferência, porque se o original não passa em zero a imagem não passa em infinito. Os pontos da circunferência original mais perto e mais distante da origem ficam a $\frac{\sqrt{2}}{4}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$ unidades de comprimento, portanto os pontos da circunferência imagem mais distante e mais perto da origem ficam a $2\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ unidades de comprimento, respectivamente. Como a circunferência original é simétrica em relação à bissectriz do primeiro quadrante, a circunferência imagem é simétrica em relação à bissectriz do quarto quadrante.

2.

a) Seja $\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re z < 2\pi,\ 0 < \Im z < 2\pi\}$ o domínio de f. A função f tem derivadas parciais contínuas, pelo que é diferenciável como função de $]0, 2\pi[^2$ em $\mathbb{R}^2$. Portanto f é diferenciável no sentido complexo nos pontos em que satisfaz a equação de Cauchy-Riemann:

$$f_x = -if_y \iff 1 - i\cos x = -i(\cos y + i) = 1 - i\cos y \iff \cos x = \cos y.$$

Atendendo a que tanto x como y pertencem a $]0, 2\pi[$, esta condição é equivalente a

$$x = y \ \vee\ y = 2\pi - x.$$

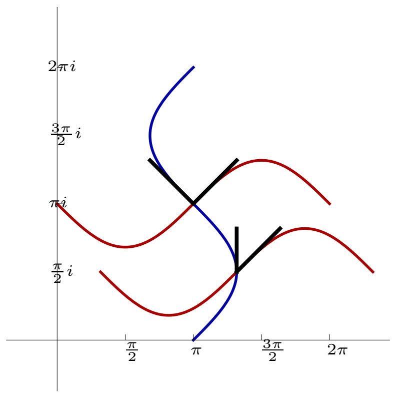
Logo, f é diferenciável em

$$\{z \in \mathcal{D} : \Re z = \Im z \vee \Im z = 2\pi - \Re z\}.$$

Nos pontos de diferenciabilidade, a derivada de f é $f'(x+iy) = f_x(x+iy) = 1 - i\cos x$.

b) Tem-se

$$\begin{aligned} f\big(x + i\tfrac{\pi}{2}\big) &= (x+1) + i\big(\tfrac{\pi}{2} - \sin x\big),\\ f(x + i\pi) &= x + i(\pi - \sin x),\\ f(\pi + iy) &= (\pi + \sin y) + iy. \end{aligned}$$



c) Tem-se $f_x\big(\pi + i\frac{\pi}{2}\big) = 1 + i$ e $f_y\big(\pi + i\frac{\pi}{2}\big) = i$. Por outro lado, $f_x(\pi + i\pi) = 1 + i$ e $f_y(\pi + i\pi) = -1 + i$. O ponto $\pi + i\pi$ é um ponto de diferenciabilidade de f. Neste ponto $|f_x| = |f_y|$ e $\arg f_y = \arg f_x + \frac{\pi}{2}$. O ponto $\pi + i\frac{\pi}{2}$ não é um ponto de diferenciabilidade de f.

3.

$$\begin{aligned}\int_\pi^{i\pi} \left(\frac{1}{z} + e^{iz}\right) dz &= \left(\log z - ie^{iz}\right)\Big|_\pi^{i\pi} \\ &= \ln\pi + i\frac{\pi}{2} - \ln\pi - ie^{-\pi} + ie^{i\pi} \;=\; i\left(\frac{\pi}{2} - e^{-\pi} - 1\right).\end{aligned}$$

4.

a) Tem-se

$$f(z) := \frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2}g(z), \quad \text{com} \;\; g(z) = \frac{1}{(z+1)^2}.$$

Ora

$$g'(z) = -\frac{2}{(z+1)^3}, \quad g''(z) = \frac{2\cdot 3}{(z+1)^4},$$

e facilmente se prova por indução que

$$g^{(k)}(z) = (-1)^k\frac{(k+1)!}{(z+1)^{k+2}}.$$

Assim, $g^{(k)}(1) = (-1)^k\frac{(k+1)!}{2^{k+2}}$. O desenvolvimento de g em série de Taylor em torno do ponto 1 é

$$g(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{g^{(k)}(1)}{k!}(z-1)^k = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k\frac{k+1}{2^{k+2}}(z-1)^k.$$

Este desenvolvimento é válido em $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 2\}$ porque este é o maior disco aberto centrado em 1 e contido na região de holomorfia de g. Conclui-se

$$\begin{aligned}f(z) &= (z-1)^{-2}g(z) \;=\; \sum_{k=0}^\infty (-1)^k\frac{k+1}{2^{k+2}}(z-1)^{k-2} \\ &= \frac{1}{4(z-1)^2} - \frac{1}{4(z-1)} + \sum_{k=2}^\infty (-1)^k\frac{k+1}{2^{k+2}}(z-1)^{k-2},\end{aligned}$$

para z em $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 2\}$. A função f tem um pólo de segunda ordem em $z = 1$.

b) Para calcularmos $\int_{|z-1|=1} f(z)\,dz$ basta integrarmos a série de Laurent da alínea anterior. O integral de $\frac{1}{4(z-1)^2}$ é zero pelo Teorema Fundamental do Cálculo porque esta função é a derivada de $-\frac{1}{4(z-1)}$. O integral da série de potências de $z-1$ é zero pelo Teorema de Cauchy porque a série de potências é uma função holomorfa em $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 2\}$. Logo,

$$\int_{|z-1|=1} f(z)\,dz = -\int_{|z-1|=1} \frac{1}{4(z-1)}\,dz = -\frac{1}{4}2\pi i = -\frac{\pi i}{2}.$$

5.

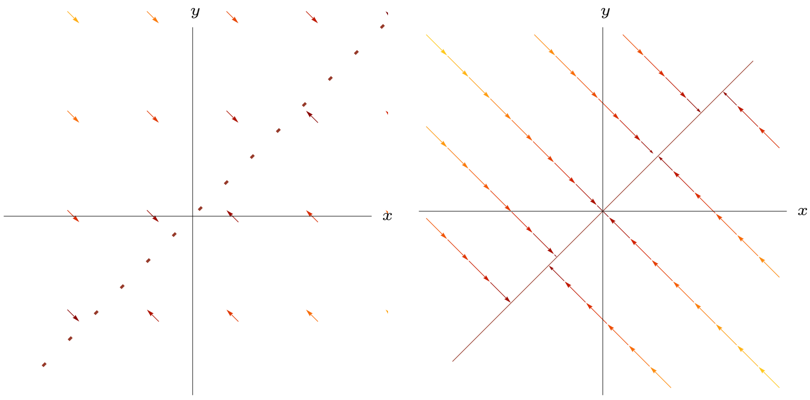
a) O polinómio característico é $\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda+2)$ pelo que os valores próprios são 0 e -2. O vector $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é próprio associado a 0, e o vector $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ é próprio associado a -2. Assim,

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = S\Lambda S^{-1}.$$

A solução geral do sistema do enunciado é

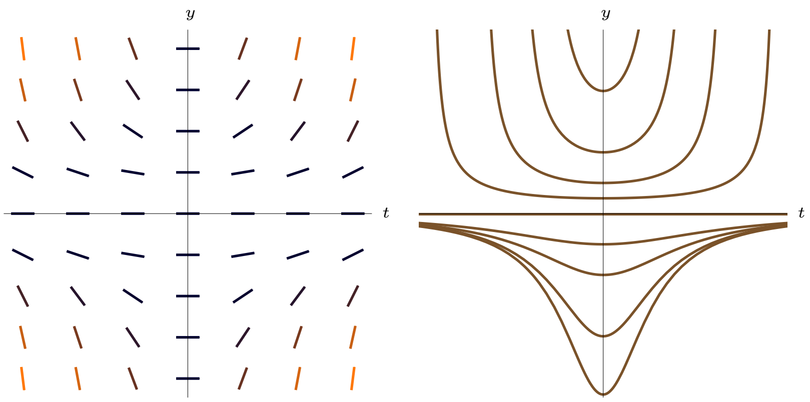
$$\begin{aligned} X(t) &= Se^{\Lambda t}S^{-1}X_0 = \frac{1}{2}[v_1\ v_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}[v_1\ e^{-2t}v_2] \begin{bmatrix} x_0 + y_0 \\ x_0 - y_0 \end{bmatrix} \\ &= \tfrac{x_0+y_0}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \tfrac{x_0-y_0}{2} e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b) Começamos por restringir a nossa atenção aos espaços próprios. O vector associado a $X = v_1$ é $AX = Av_1 = \lambda_1 v_1 = 0$. De igual modo o vector associado a $X = v_2$ é $AX = Av_2 = \lambda_2 v_2 = -2v_2$. Seja $c \in \mathbb{R}$. Mais geralmente, o sistema associa a $X = cv_1$ o vector $\lambda_1 cv_1 = 0$ e a $X = cv_2$ o vector $\lambda_2 cv_2 = -2cv_2$. Imaginemos uma partícula que na posição X tem a velocidade $X' = AX$. Se a partícula começar numa posição pertencente ao espaço próprio associado a v_1, então a partícula vai permanecer em repouso, porque a velocidade da partícula é nula. Se a partícula começar numa posição pertencente ao espaço próprio associado a v_2, então a partícula vai manter-se sobre esse espaço próprio, porque a velocidade da partícula também pertence ao espaço próprio associado a v_2 e vai mover-se em direcção à origem. Para uma partícula com uma posição inicial genérica X_0 decompomos X_0 na base dos vectores próprios da matriz. Quando o tempo aumentar, a componente de X_0 na direcção de v_1 vai manter-se, enquanto a componente de X_0 na direcção de v_2 vai diminuir.



6.

a) Esboço do campo de direcções e dos gráficos das soluções.



b) A equação $y' = ty^2$ é separável:

$$\frac{y'}{y^2} = t.$$

Reconhecemos no primeiro membro a derivada de $-\frac{1}{y}$. Integrando ambos os membros de 0 a t e usando a condição inicial,

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{y}\right) = t \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y(0)} = \frac{t^2}{2} \;\Rightarrow\; y(t) = \frac{2y_0}{2 - y_0 t^2}.$$

Esta expressão final também é válida para $y_0 = 0$, embora os passos intermédios não o sejam.

c) Se $y_0 \leq 0$ as soluções são globais, ou seja estão definidas em $\mathbb{R}$. Se $y_0 > 0$, então as soluções existem enquanto o denominador não se anula, ou seja para $|t| < \sqrt{\frac{2}{y_0}}$.

7.

a) A extensão ímpar de y é

$$z(t) = \begin{cases} -y(-t) & \text{para } t \in [-l, 0[, \\ y(t) & \text{para } t \in [0, l]. \end{cases}$$

Com vista à prova de diferenciabilidade de z em zero, calculamos

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+} \frac{z(t) - z(0)}{t - 0} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{y(t) - y(0)}{t - 0} = y'(0), \\ \lim_{t\to 0^-} \frac{z(t) - z(0)}{t - 0} &= \lim_{t\to 0^-} \frac{-y(-t) + y(0)}{t - 0} = \lim_{s\to 0^+} \frac{y(s) - y(0)}{s - 0} \\ &= y'(0). \end{aligned}$$

Assim, z é diferenciável em zero e $z'(0) = y'(0)$. Portanto, derivada de z é

$$z'(t) = \begin{cases} y'(-t) & \text{para } t \in [-l, 0[, \\ y'(t) & \text{para } t \in [0, l]. \end{cases}$$

Esta função é contínua em $[-l, l]$ porque $y \in C^1[0, l]$. Logo, z é de classe C^1.

b) Como z é ímpar, o desenvolvimento de z em série de Fourier é

$$z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\Big(\frac{n\pi t}{l}\Big) \tag{1}$$

com

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l z(t) \sin\Big(\frac{n\pi t}{l}\Big)\, dt = \frac{2}{l} \int_0^l y(t) \sin\Big(\frac{n\pi t}{l}\Big)\, dt. \tag{2}$$

Esta série converge uniformemente para z porque a extensão periódica, de período $2l$, de z a $\mathbb{R}$ é uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$. De facto, tal como se verificou que z tem derivada contínua numa vizinhança de 0, pode verificar-se que a extensão de z tem derivada contínua numa vizinhança de l.

c) Em $[0, l]$ as funções y e z coincidem pelo y é dada pelo lado direito de (1) com os b_n's como em (2). Integrando por partes, usando os factos de $y(t)$ e $\sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right)$ se anularem em 0 e l, e $-y'' = \lambda y$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l}\int_0^l y(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right)dt = \frac{2}{n\pi}\int_0^l y'(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right)dt \\ &= -\frac{2l}{n^2\pi^2}\int_0^l y''(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right)dt = \frac{2l\lambda}{n^2\pi^2}\int_0^l y(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right)dt \\ &= \lambda\frac{l^2}{n^2\pi^2}b_n. \end{aligned}$$

Há duas possibilidades. Ou $b_n = 0$ ou $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$. Como por hipótese y não é identicamente nula, deve existir algum n tal que esta segunda igualdade se verifica. Claro que esta segunda igualdade apenas se poderá verificar para um valor de n. Assim, existe $n \in \mathbb{N}_1$ tal que $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$ e

$$y(t) = c\sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right), \quad \text{com } c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$